第　二　章

発　音　体　の　振　動

第一章で振動の理論を紹介した．これは直接音響には関係がないが音響の理論を詳述する基礎知識として是非知っておかねばならぬものである．これに対してこの章で述べるものは音源となって空気中に直接音を発するものであって，音響現象とは密接な関係のあるものである．しかし発音体の周囲の空気中の音場と発音体の振動とを相関させて考えることは問題を複雑化し，初学者には理解が困難となる恐れがあるので，本章では空気の反作用を一応無視し，発音体自身の振動機構の基本的性質を明らかにする．なおここで発音体として扱うものは，振動する絃，膜，捧，環および板等である．

2・1　絃の振動[1]

発音体として最も古くから楽器その他に用いられ，またその振動機構がよく知られているものの一つに絃がある．絃とは一様な組成の糸または針金を一定の張力で張ったものをいい，その長さまたは張力を変えることにより容易に固有振動数を変化させることができるので，発音体としては便利なものである．

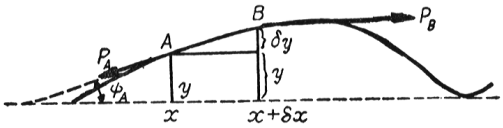
解析をする立場からいっても絃の振動は比較的容易に解析でき，その結果，倍音関係が**調和的**[2]に現われることが知られ，絃が楽器として優れた特性をもっていることの理論的基礎が与えられると共にまた近時盛んに研究されてきた**波動力学**[3]の基礎的模型としても重要なものである．

2・1・1　絃の運動方程式・波動

太さおよび組成が一様な長い糸または針金が一定の**張力**　P(N) で張られているものとし，その単位長さ毎の質量（これを**線密度**[4]と呼ぶ）を　ρ (kg / m)とする．絃は第一章で述べたいくつかの質点を糸でつないだ振動系の問題において，質点の数を無限に多くした極限と考えることができる．したがって絃は自由度が無限に多い質点系に対応し，その振動し得る振動姿態（これを**固有振動姿態**[5]と呼ぶ）の数は無数にある．したがって絃がどのような振動をするか解析をしてみる必要がある．[6]

（1） vibration of string
（2） harmonics
（3） wave mechanics
（4） linear dencity
（5） natural mode or normal mode
（6） SLATER and FRANK “Introduction to TheoreticaI Physics”Chap. XⅡ.

最初は単純な場合を考えることとし，絃の張力および綿密度は到る所一定で，その長さは非常に長いものとする．絃上の任意の一点を座標原点とし，これより右方に測った長さを x とし，x をもって弦上の任意の位置を示すことにする．原点より左方の位置は x の値を負にすることにより示される．弦上の任意の点 x における弦の横方向の変位(7)を y とする．弦が振動する場合には変位は弦の位置 x と時間 t との函数である．弦上の一点 A とこれからの微小の距職 δx だけはなれた点 B との間に挟まれた部分について見るのに，A 点の座標を x とすると B 点のそれは $x+\delta x$ となり，AB 間の絃の質量は $\rho\delta x$，その運動速度は $\frac{\partial y}{\partial t}$ 加速度は $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ である．またこの部分に加わる力は，張力 P の y 成分が弦を平衡の位置に戻そうとする方向に作用し，それは A 点に加わる力 P_A と B 点に加わる力 P_B との差の y 方向成分であると考えられる．よってこれを幾何学的の方法で求めてみる．絃が変位して生ずる曲線の A における切線と，絃が変位する前の直線とのなす角を ψ_A とすると，A 点の張力 P_A の y 成分は



第２．１図

（1）　$$F_A = P_A \sin\psi_A \quad ,$$

B 点の張力 P_B の y 成分は同様にして

（2）　$$F_B = P_B \sin\psi_B \ .$$

しかるに y が微小であれば ψ も微小であって

（3）　$$\sin\psi = \psi = \tan\psi = \frac{\partial y}{\partial x}$$

と書ける。よって x 点の ψ の値 ψ_A が与えられたとき，これから微小の距離 δx だけはなれた点の ψ の値 ψ_B を求めるには，絃に沿って ψ の変化する割合（単位長毎の変化量）が $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ と表せることを利用すれば，

（4）　$$\psi_B = \psi_A + \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x$$

を計算すればよい．また y が微小であれば，絃が変位を生じても張力はほとんど変化せず初めの値 P に保たれていると考えられるので，P_A が $-x$ の方向を向いていることに注意し

（5）　$$-P_A = P_B = P$$

とおくと，（1），（2）は

（6）　$$F_A = -P\sin\psi_A \ ,$$

（7）　$$F_B = P\left\{\sin\psi_A + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\delta x\right\}$$

となる．よって δx なる部分に作用する力の y 成分は

（8）　$$F_A + F_B = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x \qquad \text{(N)}$$

---

(7) 弦が一様でない場合は x 方向の張力の y 方向成分

となる．よって加速度と質量の積がこの力に等しいという NEWTON の方程式を書けば

（9）
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad (\mathrm{N/m})$$

となり，または形を変えて

（10）
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\quad ,\qquad (\text{波動方程式})$$
$$c=\sqrt{\frac{P}{\rho}}\qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．c は絃の張力と綿密度だけで定まる定数であり，その単位は速度の単位である．（10）は絃の変位の加速度 $\ddot{y}$ が絃のその位置の曲率 y''に比例することを示した第二階の偏微分方程式であり，[8] これを**波動方程式**[9]と呼ぶ．

絃の運動が偏微分方程式で表現されることは，絃を無数の質点の連続した自由度無限大の運動系であると考えたことと同じことを意味し，（10）は無限個の連立常微分方程式を代表したものと考えられる．したがって（10）の解には無限個の自由度が含まれている筈である．その解の形は第一章で述べたものとはかなり異なる形で表現されねばならぬ．（10）の解を求める前に，（10）が解けて y が定ったものと仮定し，運動する絃が有するエネルギーの形を求めておく．

運動する絃上の２点，x_1 と x_2 との間の部分に蓄えられる**運動エネルギー**は

（11）
$$T=\frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2}\dot{y}^2\,dx\qquad (\mathrm{J})$$

である．この部分の**ポテンシャルエネルギ -** を求める方法は二つある．第一の方法は，絃がその平衡の布置から張力にさからう外力によってある変位 y まで変形されたとき，外力のなした仕事の大きさから求める方法である．ある変位をした布置を y とし，この布置に到達する途中において張力にさからう外力によって最大変位 y の k 倍（$k<1$）の変位が生じたときを考えると，絃の δx なる区間に作用する力は張力の y 成分と平衡している筈であるから，（８）より

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\sin\psi\right)\delta x$$

であり，この場合の ψ は最終変位の位置をとったときの角に対して

（12）
$$\sin\psi=\psi=k\frac{\partial y}{\partial x}$$

と考えられる．変位がわずかに増すことは k が δk だけ増すことであり，このときの変位の増加は $y\delta k$

（8）　$\frac{\partial y}{\partial t}$ を $\dot{y}$，$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ を $\ddot{y}$ で示す．　$\frac{\partial y}{\partial x}$ を y'，$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ を y'' で示す．　この記法は LAGRANGE が Mecanique Analytique(1788)に使用した．

（9）　wave equation
この式は絃の張力以外の外力は加わっていないから初期条件として擾乱が与えられた後の自由な連動を記述した式であって強制力は含まれていない．

である．$y\delta k$ だけの変位の増加に必要なる仕事量は

(13)
$$\delta U = -\frac{\partial}{\partial x}\left(Pk\frac{\partial y}{\partial x}\right)\delta x\cdot y\delta k = -Pyy''k\delta k\delta x$$

である．よって変位が０から y まで(k が０から１まで)増加するときに絃の δx なる長さの部分に蓄えられるポテンシャルエネルギ - は

(14)
$$\delta V = \int_0^1(\delta U)dk = -Pyy''\delta x\int_0^1 kdk = -\frac{1}{2}Pyy''\delta x\,,$$

したがって x_1 と x_2 の間の部分に蓄えられるポテンシャルエネルギ - は

(15)
$$V = -\frac{1}{2}P\int_{x_1}^{x_2} yy''dx \qquad (\mathrm{J})$$

となる．Vを決定する第二の方法は，張力 P にさからって、絃を引き伸すのに必要な仕事量から計算する方法である．y なる変位をした位置の δx なる区間の絃の伸びは

(16)
$$\sqrt{\left(1+y'^2\right)}\delta x-\delta x \approx \frac{1}{2}y'^2\delta x$$

であるから，これに要する仕事量は

(17)
$$\frac{1}{2}P\int_{x_1}^{x_2} y'^2\delta x \qquad (\mathrm{J})$$

となる．(15) と (17) とは同じものを表わさなければならない．(15) は部分積分を行うと

(18)
$$-\int_{x_1}^{x_2}(yy'')dx = -\left[yy''\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} y'^2dx$$

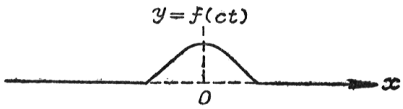
と書けるので，これを (17) と比較すると $-\left[yy''\right]_{x_1}^{x_2}$ だけ (15) の方が多い．しかし絃は通常両端は固定されているので，x_1 と x_2 を絃の端の座標とすると，この点では y は０であり，(15) と (17) は一致する．したがって絃の全体が有するポテンシャルエネルギ - は (15) からでも (17) からでも同一の値が得られる．

次に非常に**長い絃に対する (10) の解**を求めてみる．非常に長いということは絃の両端の固定された部分が，いま考えの対象にしている区間からはるかに遠方にあることを意味する．このような場所で一つの擾乱が生じたとすると，この擾乱による絃の変位の形は x と t との函数として与えられるある特定の形を持っている筈であるから，これを

(19)
$$y = f(x,t)$$

とおく．この変位の函数形はどんな形を取ってもよく，その形に制限はないが，f の形とは無関係に x と t との間に

(20)
$$y=f(ct-x)$$



第２．２図

なる関係が保たれている場合には，(20) は (10) の解であることが容易に証明できる．[11]同様に t

---

(11)
$$\dot{y} = cf'(ct-x)\ ,\quad \ddot{y} = c^2f''(ct-x)\ ,$$
$$y' = -f'(ct-x)\ ,\quad y'' = f''(ct-x)$$
となるので　$y = f(ct-x)$ は (10) を満足す．　$y = f(\cancel{ct-x})$ も同様の性質を表す．

$x-ct$

と x との間に

(21)　$$y = F(ct + x)$$

なる関係のある任意の函数 F も（10）の解である．よって第二階の偏微分方程式（10）の**一般解**は，二つの任意函数 f と F とを用いて

(22)　$$y = f(ct - x) + F(ct + x)$$

と書くことができる．[12] ここに f と F は互に独立な任意の函数形である．このことから，変位したときの絃の形はどんな形でも，ただそれが $(ct - x)$ または $(ct + x)$ なる変数を含めば（10）の解であることが知られる．変位の形がどんな形でもよいということは，絃の自由度が無限であるということを表わしている．ただ f と F の形は最初に絃に与えられる擾乱の変位 y および速度 $\dot{y}$ によって決定されるべき性質のものである．[12]

次にこの解の表わす物理的な意味をもう少し深く考えてみよう．（20）は $t = 0$ とおくと $y = f(x)$ となり，これは最初の時刻に絃が取っていた変位の形である．この変位の大きさは $x = x_0$ の位置では $y = f(x_0)$ である**（第2・3図）**．これが時間を経過して $t = t_1$ となったとすると，この時刻の絃の変位は

(23)　$$y(t_1, x) = f(ct_1 - x)$$

となるが，この値は絃上の

(24)　$$x_1 = x_0 + ct_1$$

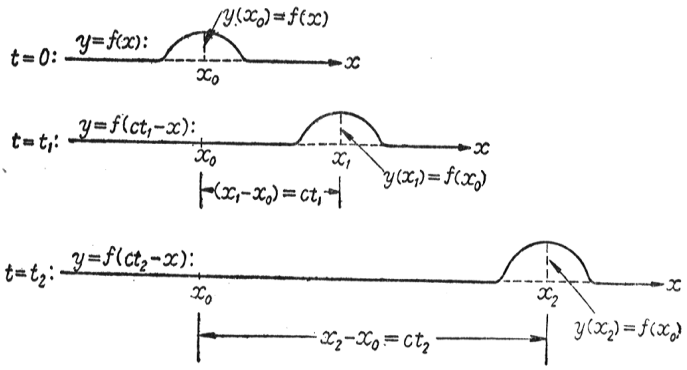
なる位置では

(25)　$$y(t_1, x) = f(x_0)$$

となり，$t = 0$ の時刻に x_0 の位置にあった変位が，t_1 の時刻には $(x_0 + ct_1)$ の位置に移動していることが分る．このように $f(x)$ で示される一つの擾乱波形は，形を崩さずに，時間の経過にしたがって $+x$ 方向に移動してゆくことが（20）によって示されている．この場合 t や x が変っても $(ct - x)$ が一定の値であれば，$f(ct - x)$ は一定値に保たれるから，絃の変位が一定の場所は

(26)　$$ct - x = 一定$$

を満足する位置にある．この位置が $+x$ 方向に移動する速度は（26）を微分することにより得られる．すなわち



第2・3図

(12)　この解は J.le Rond D'ALEMBERT（1717-83）によって 1747年に与えられた．（22）はまた $y = f(x - ct) + F(x + ct)$ と書くこともできる．D'ALEMBERT は百科辞典編集者で 数学者．力学と水力学に貢献多し．

(27)　$$c\delta t - \delta x = 0$$

より

(28)　$$\upsilon = \frac{\partial x}{\partial t} = c \qquad (\mathrm{m/s})$$

であり，(10) に示した定数 c は $f(x)$ なる波形が x 方向に移動する速度を表わしていることがわかる．以上により (20) は最初に与えられた波形が形を崩さずに c なる速度で，$+x$ 方向に伝播して行くことを示していることが理解され，この c を**波動の伝播速度**(13) という．

(21) も同様に $-x$ 方向に伝播する波動を表わしている．この結果より (10) が波動方程式と呼ばれる理由が明らかになったことと思う．なお伝播速度 c は (10) に示す通り張力と線密度との比の平方根で与えられ，これは一般に弾性を表わす項と慣性を表わす項との比の平方根で与えられるといえる．なお絃の運動の速度 $\dot{y}$ と波動伝播速度 c とを混同しないように注意を要する．

波動方程式 (10) の一般解 (22) は**初期値**が与えられれば、その任意函数 f と F の形を決定することができる．たとえば $t=0$ における変位 y_0 と初速度 $\dot{y}_0$ とが

(29)　$$y_0 = \phi(x), \qquad \dot{y}_0 = \psi(x)$$

の形で与えられたとすると，(22) の変数の形を $x-ct$ として $t=0$ とおけば

(30)　$$f(x)+F(x)=\phi(x), \qquad -cf'(x)+cF'(x)=\psi(x)$$

となるが、さらに (30) の第二の式は積分して

(31)　$$-f(x)+F(x)=\frac{1}{c}\int^{x}\psi(x)dx$$

とすることができ，(30) と (31) より

(32)　$$2f(x)=\phi(x)-\frac{1}{c}\int^{x}\psi(x)dx,$$

(33)　$$2F(x)=\phi(x)+\frac{1}{c}\int^{x}\psi(x)dx$$

を得る．よって

(34)　$$f(x-ct)=\frac{1}{2}\phi(x-ct)-\frac{1}{2c}\int^{x-ct}\psi(x-ct)d(x-ct),$$

(35)　$$f(x+ct)=\frac{1}{2}\phi(x+ct)+\frac{1}{2c}\int^{x-ct}\psi(x+ct)d(x+ct),$$

となる．これより**一般解 (22) を初期値で表わした形は**

(36)　$$y=\frac{1}{2}\{\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(z)dz$$

と書ける．もしも初速度 $\dot{y}$ が 0 であれば (36) の積分の項は不用となる．

いままでは絃の運動にはマサツのような損失がないものと仮定して論じてきたが，**運動速度に比例**

(13)　velocity of propagation of wave

する消費力が作用する場合には，運動の方程式は

(37)
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-k\rho\frac{\partial y}{\partial t}$$

と書かねばならぬ．**マサツ係数**は計算に都合のよいように$k\rho$ と置いてある．これを変形すると

(38)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-kp\frac{\partial y}{\partial t}\qquad\text{(減衰波動方程式)}$$

となり，これを解くには

(39)
$$y=u(x,\ t)e^{-\frac{k}{2}t}$$

とおいてこのｙを(38)に代入すると，uの満足すべき関係として

(40)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を得る.[14] これは（10）と同形であるから容易に

(41)
$$u=f(ct-x)+F(ct+x)$$

と書け，変位は

(42)
$$y=e^{-\frac{k}{2}t}f(ct-x)+e^{-\frac{k}{2}t}F(ct+x)$$

となる．この結果$+x$ および$-x$方向に伝播する波動は時間と共に減衰することが示される．しかし一方このような波動は伝播距離xが増しても減衰せねばならない．このことを確めるには，f またはF の形が，それぞれ$(ct-x)$ または$(ct+x)$ を変数とする二つの函数の積であると考え

(43)
$$f(ct-x)=e^{-\frac{k}{2}\left(t-\frac{x}{c}\right)}g(ct-x)$$

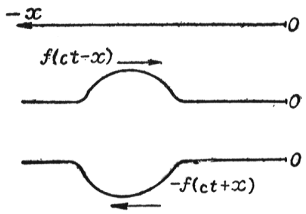
(44)
$$F(ct+x)=e^{-\frac{k}{2}\left(t+\frac{x}{c}\right)}G(ct+x)$$

とおいてみると,[15] (42)は

(45)
$$y=e^{-\frac{k}{2}\frac{x}{c}}g(ct-x)+e^{+\frac{k}{2}\frac{x}{c}}G(ct+x)$$

となる．第一項は$+x$方向に進行するにしたがって減衰する波動であり，第二項は$-x$方向に進行するにしたがって減衰する波動である．（42）と（45）とは表現形式は異なるが同一の事実を表わしている．

いままでの所は無限に長い絃を考えてきたが，次に**一端が固定された**絃について考えてみる．固定端を $x=0$とし，絃はこの点から左方$-x$ の方向に長く続いているものとする．このような場合，無限に長い絃の解として求めた（22）は固定点の近くではどのような形となるであろうか．固定点０においては常に変位 y は０である．したがって（22）は$x=0$



第2・4図

(14) k のニ次の項は無視している．これは k が大きくない範囲でのみ正しい．k は**1・3** で 定義した制動係数である．
(15) f とF とが $ct-x$ または $ct+x$ を変数とする任意函数であることからこのような置 換を行うことができる．

としたとき常に0とならなければならない．これを固定端の**境界条件**(16)という．この条件を満足するためには

(46)　$f(ct)+F(ct)=0,$

(47)　$f=-F$

でなければならず，したがって一端を固定された絃の解は

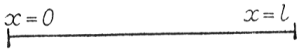
(48)　$y=f(ct-x)-f(ct+x)$

となる．これは$+x$方向に進行する波形と$-x$方向に進行する波形とが同形でなければならぬことを示している．これは固定端に向って$-x$方向から$+x$方向へ進行してきた波は**固定端で反射**(17)されて$-x$方向に進行すること，そのときに反射された波形は入射波形(18)と同形で，ただ変位の符号が逆になることを意味している．

次に**両端に固定された絃**の運動を考えてみる．　$x=0$および　$x=l$で固定されていれば，境界条件は

(49)　$x=0$　にて　$y=0$

(50)　$x=l$　にて　$y=0$



第２．５図

と表わされる．したがって（49）より

(51)　$f(ct)=-F(ct)$

であることを必要とし，（50）と（51）より

(52)　$f(ct-l)-f(ct+l)=0$

なることを必要とする．これは

(53)　$f(z)=f(z+2l),\qquad z=ct-l$

なることを意味し，　f は変数　z が　$2l$だけ増加したときにもとの値にもどるような函数でなければならぬことを意味している．このような性質は，もはや任意の函数f　では実現できず，　f　は　$2l$ を周期とする周期函数(19)に限られることになる．このことは運動が

$$\frac{2l}{c}$$

を周期とする**周期運動**であることを意味し，両端固定絃は一定周期の振動をすることが示される．

2・1・2　両端固定絃の規準振動姿態(1)．倍音(2)

前節の結果をまとめれば両固定端からの反射波の影響が現われないような長い絃が自由な運動をす

(16) boundary condition
(17) reflection
(18) incidental wave
(19) periodic function
(1) normal mode
(2) harmonics

る場合には任意の波形の擾乱が一定の速度で絃上を伝播し得るが，両固定端からの反射波の影響が現われる場合には絃の運動は $\frac{2l}{c}$ を周期とする周期運動に限られるということになる．この現象は，波動方程式を正確に解くことによって明確に示すことができる．その結果は解いて見れば分るように，波動方程式（10）の解は $\frac{2l}{c}$ を周期とする周期函数で与えられ、それから任意の時刻における絃の変位の幾何学的な形と振動数との関係が見出され，倍音の概念が導入される．しかし実際にわれわれの耳が識別する**音色**は，絃の振動の幾何学的な形によるのではなく，そのような形を構成する成分倍音振動の振動数と振幅とによるのである．

波動方程式（10）の一般解を求める一つの方法は，変位 $y(x,t)$ が x のみの函数 $f_1(x)$ と t のみの函数 $f_2(t)$ との積の形で構成されていると仮定して出発する．すなわち

（54）　$$y = f_1(x)\cdot f_2(t)$$

と仮定する[3]．これを（10）に代入するために微分すると

（55）　$$\frac{\partial y}{\partial t} = f_1(x)\cdot\frac{df_2(t)}{dt},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f_1(x)\cdot\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_2(t)\cdot\frac{df_1(x)}{dx},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f_2(t)\cdot\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$$

となるので（10）は

（56）　$$c^2 f_2(t)\cdot\frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} = f_1(x)\cdot\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}.$$

この式の両辺 y で除すと

（57）　$$\frac{c^2}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dt^2}$$

となり，左辺は x ばかりの函数，右辺は t ばかりの函数に分離される． x と t とは互に独立な座標変数であるから，任意の x と t の順に対して（57）が恒等的に成立するためには，（57）の左辺および右辺がそれぞれ， x や t には無関係な特定値に等しくなっていなければならない．この特定値を $-p^2$ とおくと（57）は

（58）　$$\frac{c^2}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dt^2} = -p^2.$$

これは二つの等式であるからそれぞれを分離して書くと

（59）　$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} + p^2 f_2 = 0,$$

（60）　$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{p^2}{c^2} f_1 = 0$$

なる t ばかりに関する式（59）と x ばかりに関する式（60）に分離できる．

（3） このように仮定して得た解が一般解（general solution）であることが証明されれば，すべての特別解はこの中に含まれることとなり、この特殊の形で（10）の解を代表させ得ることになる．

（10）のようにxとtとのニつの変数が入り混っている偏微分方程式を，tばかりの式（59）とxばかりの式（60）に分離することを**変数を分離する**(4)といい，pを**分離定数**(5)と呼ぶ．(54)の仮定は（10）の変数を分離するための一つの手段である．変数の分離された方程式は，もはや偏微分の必要はなく常微分方程式となる．$\left(\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{d}{dt}\right)$.

（59）は第一章で示した振動方程式であってその解は

（61）　$$f_2 = C_2\cos(pt-\psi)$$

であり，（60）も（59）と全く同形であるから，解は

（62）　$$f_1 = C_1\cos\left(\frac{p}{c}x-\phi\right) = A_1\cos\frac{p}{c}x + B_1\sin\frac{p}{c}x$$

と書ける．よって（54）にこれらを代入すると（10）の解は

（63）　$$y = f_1(t)\cdot f_2(x) = \left(A\cos\frac{p}{c}x + B\sin\frac{p}{c}x\right)\cos(pt-\psi)$$

この解において，pは未だ決定されていない定数であり，その単位は（61）より明らかなように振動角速度である．またA, B, ψは絃の境界条件および初期条件で定まる任意定数である．（63）は（10）の**一般解**として知られている形であるが，その証明は省いておく．(6)

両端固定絃においては，その境界条件としては固定端$x=0$および$x=l$で変位が０であることを必要とする．この条件はtに無関係に成立せねばならぬので，（63）が両端固定絃に対する解となるためには，（62）が上記の境界条件を満足していなければならない．したがって

（64）　$x=0$　にて　$f_1=0$

となるためには，$\cos\frac{p}{c}x$は$x=0$とおくとき０となり得ないから，

（65）　$A_1 = 0$

でなければならず，さらに

（66）　$x=l$　で　$f_1=0$

となるためには

（67）　$$\sin\frac{p}{c}l = 0, \qquad B\neq 0$$

なることを必要とする(Bは０とはなり得ない，Aが０であって同時にBも０ならば，$f_1=0$となり変位は生ぜず，絃は停止していることになる)．（67）の関係はc, l, pの間に特殊の関係のある場合以外には満足されない．その関係は，$\sin x$を０とするxの値が$0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$であることに注意すれば

（4） seperation of variable
（5） seperatioo constant
（6） 微分方程式の教科書を参照されたい．

(68)
$$\frac{p}{c}l = 0, \pi, 2\pi, \cdots n\pi \cdots \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

でなければならぬ．よって分離定数 p は

(69)
$$p = \omega_n = \frac{n\pi c}{l} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

なる特定の値を取らねばならぬ．この特定の値 ω_n を両端固定絃の**固有値**(7)と呼ぶ． ω_n は特定の値であるが，その値の種類は n に応じて無数にある．これは固定絃の振動しうる自由振動の振動数を決定する定数であり，このことから**絃の自由振動数**は

(70)
$$\nu_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad \text{(Hz)}$$

で定められ，特定の振動数でしか存在し得ないことが分る．この内で $n = 1$ の場合を**基本振動数**(8)と呼び，固定絃の最も低い自由振動数であり，これを ν_1 と記す。次に低い振動数は $n = 2$ のときでありこれを**第二倍音**(9)と呼び，ν_2 と記す．この場合

(71)
$$\nu_2 = 2\nu_1$$

となっている．このように絃は基本振動数 ν_1 の整数倍の振動数（これを**倍音**と呼ぶ）を固有値として無数に持っている．(10)

このようにして分離定数 p の取り得る固有値 ω_n が決定されると、ある一つの固有値 ω_n に対する絃上の各点の変位（63）は

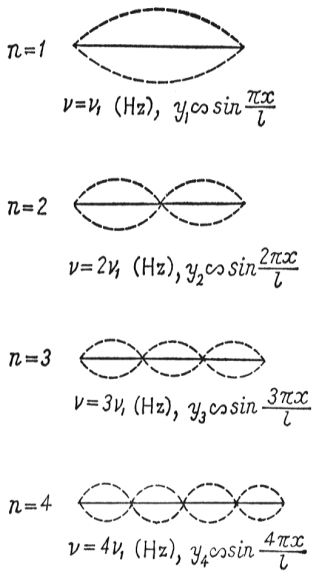
(72)
$$\begin{aligned} y_n &= B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t - \varphi_n\right) \\ &= B_n \sin k_n x \cdot \cos\left(\omega_n t - \varphi_n\right), \\ k_n &= \frac{\omega_n}{c} = \frac{n\pi}{l} \quad (\text{rad/m}), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

で与えられる．ここに B_n， φ_n は初期条件で定まる定数である．(72) により，第 n 倍音の振動数で振動する絃の変位は完全に定まる．ここに $\sin k_n x$ を両端固定絃の**波動函数（固有函数または規準函数)**と呼び，(11) y_n で表わされる振動を第 n **次の規準振動姿態**(12)と呼ぶ．なお k_n は絃の上に生ずる波の波長または波の数を表わす定数であり，これを**位相定数**(13)または**波長定数**と呼ぶ．

低次の規準振動姿態を（72）から計算して図示すると**第 2・6 図**のようになる。これより明らかなように，基本振動($n = 1$)では絃全体が振動し両端以外に停止している点がない．変位の欠きさは sine

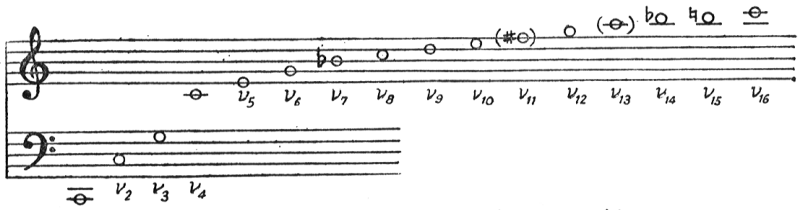
(7) eigen value または characteristic value
(8) fundamental frequency
(9) second harmonics または overtone
(10) p の取り得る値が無数にあることは、絃の自由度が無限大であることを意味する．
(11) wave function、eigen function、normal function、characteristic function 等という．
(12) Nth normal mode または natural mode
(13) phase constant または wave length parameter といい、空間座標に関する固有値である．

曲線に従い絃の中央（$x=l/2$）で最大値 B_1 となる．この（最大振幅の位置）を振動の**腹**[14]または**波腹**という。



第 n 次規準振動は n 個の波腹と $n-1$ 個の波節とを有す．
第2・6図

第二次倍音振動（第二倍音）（$n=2$）は基本振動とやや趣を異にし絃の両端の他中央（$x=\frac{1}{2}l$ の位置）に変位の無い点（停止した点)が生ずる．この点を振動の節[15]または**波節**と呼ぶ．振幅の腹は２箇所に生じ，それぞれ $x=\frac{1}{4}l$ および $x=\frac{3l}{4}$ の位置にあり，変位の方向は互に反対である．したがって絃は中央の点から見て**逆対称**[16]の形で振動する．この場合も変位の分布はsine曲線であり，０から l までの間でsineの１周期(０～2π)を経過する．このような空間における変位の分布の１周期に相当する長さを１波長[17]と呼ぶ．したがって第二倍音の振動姿態は絃上に１波長乗っているといい．



第2・7図　　倍音順位と音程との関係

波長を λ(m) と記せば

$$\lambda_2 = l \qquad \text{(m)}$$

である．これより基本振動姿態の波長は

$$\lambda_2 = 2l \qquad \text{(m)}$$

であるといえる．すなわち低次振動ほど波長は長い．

第三次規準振動は $x=\frac{1}{3}l$，　$x=\frac{2}{3}l$ の２点にそれぞれ節が生じ，その間に３個の波腹を有する振動姿態であり，波長は

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}l \qquad \text{(m)}$$

となる．一般に第 n 次振動の波長 λ_n は

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n} \qquad \text{(m)} \tag{73}$$

から求められる．　k_n を波長定数と呼ぶ理由はここにある．

なおここに示したように腹と節の位置が絃上に固定して，時間と共に移動しないような振動形を**定常波振動**[18]と呼び，(72) のように　$\sin k_n \cdot \cos\omega t$　の形，すなわち時間因数と空間因数とが単に積

(14)　loop　　(15)　node　　(16)　anti-symmetry　　(17)　wave length
(18)　stationary wave

の形となっている．これに反して，$f(ct-x)$ または $f(\omega t-kx)$ の形は，c または ω/k の速度で f なる波形が絃上を時間と共に移行するので，節や腹を生じない．たとえば $f(z)$ の形を $\sin z$ とすると

(74)
$$\sin(\omega t-kx)=\cos kx\cdot\sin\omega t-\sin kx\cdot\cos\omega t$$

は sine 波形の変位が絃上を時間と共に滑るように移動することを表わしていて節や腹は生じない．この形の波形を**進行波**[19]と呼ぶ．

規準振動の次数が上昇すると振動数 ν_n は次第に高くなるが，その高さの感覚は**第 2･7 図**に示す通りとなる．

（72）はある一つの固有値 ω_n に対する（10）の解である．実際の絃では，色々の ω_n 振動が同時に混在し，その結果変位の形も正弦波形と異なった様々の形を取ることが知られている．このような現象は数学的には（72）が（10）の解であれば（72）の取り得るすべての ω_n について求めた解 y_n を**一次結合**[20]したものもやはり（10）の解であることと同意義であって，こうして求めた解

(75)
$$y=\sum_n B_x'\sin k_x x\cdot\cos(\omega_n t-\varphi_n)$$

を**両端固定絃の一般解**と称する．（75）は与えられた任意の初期条件で絃が振動し得るすべての自由振動の形を含んでいる．この場合 B_n はある波形 y を構成する第 n 次倍音成分の振幅である．（75）を初期条件を与えるのに都合のよい形になおすと

(76)
$$y=\sum_n\left(C_n\cos\omega_n t+D_n\sin\omega_n t\right)\sin k_n x$$

となり，初期値（$t=0$ における y と $\dot{y}$ の値）に応じて C_n と D_n を決定することができる．

第 n 次規準振動の持つエネルギーは

(77)
$$T_n=\frac{1}{2}\rho\int_0^l\dot{y}_n^2\,dx=\frac{n^2\pi^2\rho c^2}{4l}B_n{}^2\sin^2(\omega_n t-\varphi_n)\qquad\text{(J)},$$
$$V_n=\frac{1}{2}\rho\int_0^l y_n'^2\,dx=\frac{n^2\pi^2 P}{4l}B_n{}^2\cos^2(\omega_n t-\varphi_n)\qquad\text{(J)}$$

(78)
$$T_n+V_n=\frac{n^2\pi^2 P}{4l}B_n^2\qquad\text{(J)}$$

となり，すべての規準振動の持つエネルギーの総計は

(79)
$$T+V=\frac{\pi^2 P}{4l}\sum_n n^2 B_n{}^2=\frac{\pi^2 P}{4l}\sum_n n^2\left(C_n{}^2+D_n{}^2\right)\qquad\text{(J)}$$

となる．ただし

(80)
$$\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \frac{1}{2}l & (m=n)\end{cases}$$

(19) progressive wave
(20) linear combination, 線型結合ともいう．

なる恒等式を用いている.[21] ここに $n=m$ のときの値 $\frac{l}{2}$ を**規準化因数**[22]と呼ぶ.

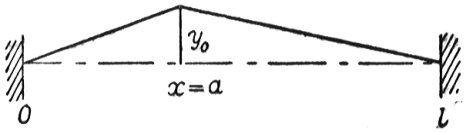
初期条件として，最初に絃上の一点 $x=a$を引っぱって放す場合を解いてみよう． $x=a$ を引っぱって y_0なる変化をさせ，これを放す時刻を $t=0$ に選ぶ． $t=0$の時刻の絃の形は**第2・8図**のようなものであり，これを函数形で示すと

$0<x<a$ の範囲は

(81)
$$y_1=\frac{y_0 x}{a},$$

$a<x<l$ の範囲は

(82)
$$y_2=\frac{y_0(l-x)}{l-a}$$



第2・8図

である．なお放すときに絃を静かに放すとすれば

(83)
$$\dot{y}\big]_{t=0}=0 \qquad (0<x<l)$$

である．(76) よりy と$\dot{y}$ を求め， $t=0$ の値を初期値に等いとおくと

(84)
$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x=\frac{y_0}{a}x, \qquad (0<x<a)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x=\frac{y_0}{l-a}(l-x), \qquad (a<x<l)$$
$$D_n=0.$$

これより C_nが決定できれば yを定めることができる．それには，(80) の関係を用いて (84) の左辺の多項式（ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を含む）から C_mを含む項を取り出せばよい．そのためには両辺に $\sin k_m x$ を乗じ絃の全長にわたって積分すればよいが，(81) (82) で定義した y_1 および y_2はそれぞれ $0<x<a$ および $a<x<l$ の区間でしか使用できないから，(84) を

(85)
$$\int_0^a \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x\right] \sin k_m x dx=\int_0^a \frac{y_0}{a} x \sin k_m x dx,$$

(86)
$$\int_a^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x\right] \sin k_m x dx=\int_a^l \frac{y_0(l-x)}{l-a} \sin k_m x dx$$

とし，これを加え合せると

(87)
$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x\right] \sin k_m x dx=\int_0^a \frac{y_0}{a} \sin k_m x dx+\int_a^l \frac{y_0(l-x)}{l-a} \sin k_m x dx$$

となり，全区間にわたる積分形を得る．(87) の左辺は直交性 (80) により$n=m$の場合には

(21) これを三角函数の**直交性**とよぶ． condition of orthogonarity．証明は**2･1･9**参照． 三角函数に限らず直交性のある函数を級数として用いれば任意の函数形を表現することができる．

(22) normalization factor

(88)
$$\int_0^l C_n \sin^2 k_m x\, dx = \frac{1}{2} C_n$$

となるが，$n \neq m$ の場合にはつねに０となるので結局

(89)
$$C_m \frac{2}{l}\int_0^a \frac{y_0 x}{a}\sin k_m x\, dx + \frac{2}{l}\int_a^l \frac{y_0(l-x)}{l-a}\sin k_m x\, dx\,,$$

または

(90)
$$C_m = \frac{2}{l}\left[\int_0^a y_1 \sin k_m x\, dx + \int_a^l y_2 \sin k_m x\, dx\right]$$

と表わせる．(89) の第二項は形をかえると

(91)
$$\int_a^l \frac{y_0(l-x)}{l-a}\sin k_m x\, dx = \frac{y_0}{l-a}\int_{l-a}^0 (-1)^m u \sin k_m u\, du$$
$$= \frac{-(-1)^m y_0}{l-a}\int_0^{l-a} x \sin k_m x\, dx\,,$$

ただし
$$u = l - x$$
となるので (90) は

(92)
$$C_m = \frac{2y_0}{l}\left[\frac{1}{a}\int_0^a y_1 \sin k_m x\, dx - \frac{(-1)^m}{l-a}\int_0^{l-a} x \sin k_m x\, dx\right]$$
$$= \frac{2y_0}{m^2\pi^2}\frac{l^2}{a(l-a)}\sin k_m a\,,$$

ただし
$$k_m = \frac{m\pi}{l}$$

となる．よって (76) より $t > 0$ の任意の時刻の第 m倍音振動の変位は

(93)
$$y_m = \frac{2y_0}{k_m{}^2 a(l-a)}\sin k_m a \cdot \sin k_m x \cdot \cos\omega_m t$$

で与えられる．したがって絃の変位は

(94)
$$y = \frac{2y_0 l^2}{\pi^2 a(l-a)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi a}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\cdot\cos\omega_m t$$

である．[23] これを見ると，倍音の振幅はその次数の平方m^2 に反比例しており，またa が $\frac{l}{m}$ の整数倍となるときには第 m倍音の振幅は０となることが示されている．この倍音の含み方は絃を引いて放した場合に発生する音の音色を特長づけるもので，高次倍音は$\frac{1}{m^2}$の割合でしか含まれていない．よって第９次倍音以上は事実上無視できる．したがって，もしもa を $\frac{l}{7}$ の所に選べば、第７次倍音も除去でき，**ギターのような楽器の音色**に美しい澄んだひびきを持たせることが出来る．

絃の振動に関連して**バイオリンの絃の振動姿態**が，古くから研究されている．[24]その結果を引用

(23) この解法は FOURIER の定理による．**2・1・9** 参照．
(24) HELMHOLTZ が始めて研究した．光学的方法により絃の運動のリサジウ図形を描かせて，その振動姿態を見極めている．

すれば，絃がマサツ力のために弓に引っ張られてある程度変位すると自己の張力によってピンと後に戻り，また弓に引かれて変位する．その繰返しが絃の自由周期と一致すると自由振動が持続し，音を発する．したがって弓は絃の自由振動を持続し，その損失エネルギーを補給する役目をし，絃自身の運動は本質的には自由振動である．ただ，絃の一端は駒を通して胴（共鳴幅射器）と結合しているのでかなり大量のエネルギーが胴の方へ吸収され，自由振動を持続させるためには弓でエネルギーを補給することか必要である．このように絃の運動を調べた後に，(81）と（82）のような初期条件を与えて運動方程式を解くと（94）とほとんど同形の解を得る．ただ弓の位置による値 $\frac{m\pi a}{l}$ の項が含まれない．バイオリンの音色に弓の位置 a が関係しないことは実際面から見て奇妙なことであり，結局解析の不完全さによるものと判断せざるを得ない．したがってこの解析は歴史的な興味の他には余りとりえがないので省くことにする．詳細は文献[25]を参照されたい。

2・1・3　マサツ損失のある両端固定絃の自由振動

絃を張って空気中で自由振動をさせると，絃の振動はしばらくは持続するがやがて減衰して遂には停止する．これは絃が空気とすれ合ってマサツ損失を生ずることや，振動のエネルギーが音のエネルギーとなって空気中に放射されることによる．[1] したがっていかなる絃でも実際には多少の損失力の影響を受けていると考えればならぬ．これらの損失力を代表する制動係数を k とし，損失のある絃の自由振動姿態を求めるために（37）または（38）より出発する．

（38）より波動方程式を

x　　t

(95)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+k\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

とかき(54)の仮定を代入すると

(96)
$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2 f_2}\left\{\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}+k\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}=-\gamma^2$$

となるので変数分離ができ

(97)
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\gamma^2 f_1=0,$$

(98)
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}+k\frac{\partial f_2}{\partial t}+c^2\gamma^2 f_2=0$$

となる．（97）の解は

1

(99)
$$f_1=A_1\cos\gamma x+B\sin\gamma x$$

である．（98）の解を e^{pt} と仮定すると p は

(100)
$$p^2+kp+c^2\gamma^2=0$$

を満足せねばならぬから，これより p と γ の関係は

(25)　M.LANB ： 前掲 **27**.
(1)　輻射抵抗といわれる損失係数である．

(101)
$$p=-\frac{k}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-c^2\gamma^2}=-\frac{k}{2}\pm ic\gamma\sqrt{1-\frac{1}{c^2\gamma^2}\left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

となる．よって（98）の解は

(102)
$$f_1^{\cancel{2}}=C_2e^{-\frac{k}{2}t}\cdot e^{-i\omega' t}+D_2e^{-\frac{k}{2}t}\cdot e^{+i\omega' t},$$

(103)
$$\omega'=c\gamma\sqrt{1-\left(\frac{k}{2cr}\right)^2}=\omega\sqrt{1-\left(\frac{k}{2\omega}\right)^2},$$

(104)
$$\omega=c\gamma$$

となる．したがって（95）の一般解は

(105)
$$y=\left(A\cos\gamma x+B\sin\gamma x\right)e^{-\frac{k}{2}t}\cos\left(\omega' t-\varphi\right)$$

と書くことができる．

固定絃の場合には（64）（66）なる境界条件を満足する必要があるので分離定数 γ の取り得る固有値は損失のない場合と同様に

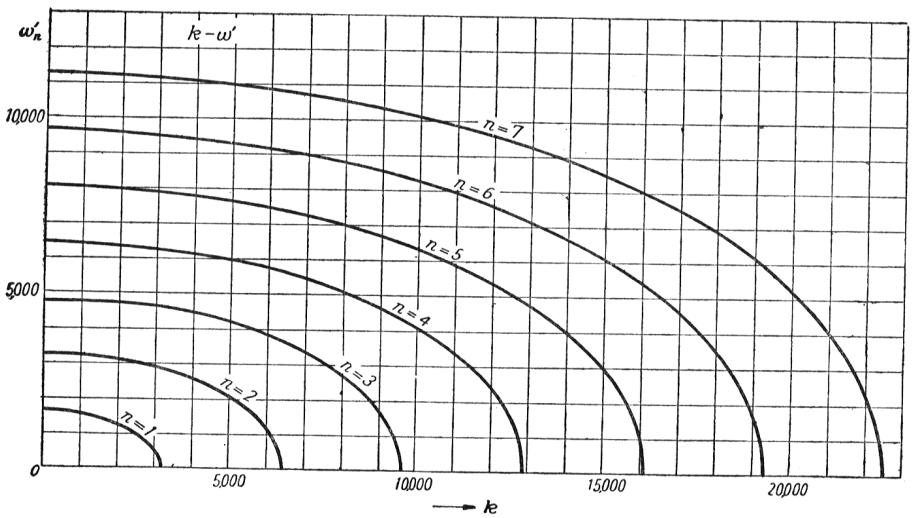
(106)
$$\gamma l=n\pi \quad \text{または} \quad \gamma=\frac{n\pi}{l} \qquad (n=1,2,3\cdots)$$

と定まる．したがって両端固定絃の一般解は

(107)
$$y=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\frac{k}{2}t}\sin\gamma_n x\cdot\cos\left(\omega_n' t-\varphi_n\right),$$

$$\gamma_n=\frac{n\pi}{l},\quad \omega_n'=c\gamma_n\sqrt{1-\left(\frac{k}{2c\gamma_n}\right)^2},$$

$$n=1,2,3\cdots$$



$$\omega_n'=\omega_n\sqrt{1-\left(\frac{1}{\omega_n}\frac{k}{2}\right)^2},\quad \frac{\omega_1}{2\pi}=256\,(\mathrm{Hz}),\quad T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=3.9\times10^{-3}\,(\mathrm{s}),\quad \tau=\frac{2}{k}\,(\mathrm{s}).$$

第2・9図　　規準角速度 ω_n' と制動係数 k との関係.

となる．これは減衰項 $e^{-\frac{k}{2}t}$ が付加したこと，角速度が ω' となったこと以外には（75）と変る所がない．

これより，初期条件として，$x=a$ の位置を $y=y_0$ だけ引いて $t=0$ の瞬間に放す場合を計算すると，全く前と同様の操作で，

（108）
$$y=\frac{2y_0l^2}{\pi^2a(l-a)}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{2}t}\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi a}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\cdot\cos\omega_m{}'t$$

を得る．ここで注意すべきは、実際に生ずる現象では，制動係数 k の値は規準振動姿態によって異なるのが普通であるから，k も m の函数と見なすのが妥当である．**第2･9図**は k が ω' におよぼす影響を示したものである．

2・1・4　絃の強制振動

絃に外力が作用し，絃の自由振動周期とは無関係に任意の周期の振動を強制する場合の絃の振動姿態は，自由振動とは異なるものとなる．このような問題を数学的に解くには自由振動に比較してかなり難解な手法を必要とし，容易に解が得られない．しかし特殊な問題には外力の取扱い方を適当にすれば，かなり容易に解を見出すことができる．

いま一つの特別な場合として両端固定絃の一点 $x=a$ に交番振動をする外力 Fe^{-ipt} の実数部が加わったものと仮定する．絃には制動係数も k が作用しているものとし，(1)絃のすべての振動の形が（95）の一般解（105）から求められることを想起すると，$x=a$ なる点の変位が外力によって強制されて y_0e^{-ipt} の実数部に保たれている場合の絃上の各点の変位は，（105）にて

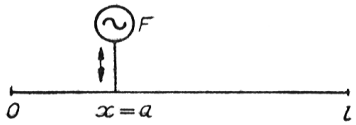
（109）　$x=0$　および　$x=l$　で　$y=0$，

（110）　$x=a$　で　$y=y_0e^{-ipt}$

を満足するように諸定数を定めればよい．(2)（105）を書きかえて

（111）
$$y=\left(A\cos\gamma x+B\sin\gamma x\right)e^{-\frac{k}{2}t\mp i\omega't}$$

とすると，$0<x<a$ の区間で（109）を満足する形は



第2 .10 図

（112）
$$A=0,$$
$$y_1=B_1\sin\gamma x\cdot e^{-\frac{k}{2}t\mp i\omega't}$$

であり，これが（110）を満足するためには

（113）
$$y_1e^{-ipt}=B_1\sin\gamma a\cdot e^{-\left(\frac{k}{2}\pm i\omega'\right)t}$$

とならなければならぬ．（113）が成立するためには

（114）
$$y_0=B_1\sin\gamma a,$$

（1）　$k=0$　とおけば無損失絃の解となる．
（2）　外力を境界条件として導入する方法である．

(115)
$$-ip=-\frac{k}{2}\mp i\omega'$$

なることが必要である．同様に $a<x<l$ の区間で（109）（110）を満足するためには

(116)
$$A\cos\gamma l+B\sin\gamma l=0\,,$$
$$A\cos\gamma a+B\sin\gamma a=y_0$$

と（115）の条件とが連立することを必要とする．これより

(117)
$$y_1=\frac{\sin\gamma x}{\sin\gamma a}y_0e^{-ipt}\,,\qquad (0<x<a)$$
$$y_2=\frac{\sin\gamma(l-x)}{\sin\gamma(l-a)}y_0e^{-ipt}\,,\qquad (a<x<l)$$

(118)
$$\gamma=\frac{p}{c}\sqrt{1+i\frac{k}{p}}=\alpha+i\beta\,,$$
$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{p}{c}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{k}{p}\right)^2}\pm 1}{2}}$$

であればよいことになる.[3](117) の変位の大きさ y_0 は強制力 F の函数であるから，y_0 の所は F で表現されねばならない．そのために，$x=a$ における力の平衡を考えてみると，この点では，外力は絃の張力 P および絃全体のマサツ抵抗力と平衡している筈である．したがって力の平衡の式は

(119)
$$Fe^{-ipt}=P\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}-\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)\Bigg]_{x=a}+k\rho\left\{\int_0^a\frac{\partial y_1}{\partial t}dx+\int_a^l\frac{\partial y_2}{\partial t}dx\right\}$$

であり，これに（117）を代入して計算すると y_0 と F との関係として力の平衡の式は

(120)
$$y_0=\frac{\sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-a)\cdot F}{P\gamma\sin\gamma l+i\frac{pk\rho}{\gamma}\left\{\sin\gamma l-\sin\gamma(l-a)-\sin\gamma a\right\}}$$

を得る．よって強制力による振動の変位は

(121)
$$y_1=\frac{\sin\gamma(l-a)}{\Phi}\cdot\sin\gamma x\cdot Fe^{-ipt}\,,\qquad (0<x<a)$$
$$y_2=\frac{\sin\gamma a}{\Phi}\cdot\sin\gamma(l-x)\cdot Fe^{-ipt}\,,\qquad (a<x<l)$$

ここに

(122)
$$\Phi=P\gamma\sin\gamma l+i\frac{pk\rho}{\gamma}\left\{\sin\gamma l-\sin(l-a)-\sin\gamma a\right\}$$

となる．もしも減衰を無視し得れば $\gamma\to\frac{p}{c}$ となり（121）は

（3） $\left(\frac{k}{p}\right)^2<1$ ならば $\sqrt{1+\left(\frac{k}{p}\right)^2}\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{p}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{k}{p}\right)^4$，$\alpha\approx\frac{p}{c}$，$\beta\approx\frac{k}{2c}$.
$\left(\frac{k}{p}\right)^2>1$ ならば $\sqrt{1+i\frac{k}{p}}=\sqrt{\frac{k}{p}}\sqrt{\frac{p}{k}+i}$，$\alpha\approx\beta\approx\frac{1}{c}\sqrt{\frac{pk}{2}}$.

(123)
$$y_1 = \frac{\sin\dfrac{p(l-a)}{c}}{\dfrac{p}{c}\sin\dfrac{pl}{c}}\sin\frac{px}{c}\cdot\frac{F}{P}e^{-ipt},$$
$$y_2 = \frac{\sin\dfrac{pa}{c}}{\dfrac{p}{c}\sin\dfrac{pl}{c}}\sin\frac{p(l-x)}{c}\cdot\frac{F}{P}e^{-ipt}$$

となる．

(121) は定常状態を記述した解である．もしも静止している絃に急に外力が作用したり，あるいは F の大きさが突然変ったりした場合には，この解で表現することはできない．その理由は，(121) は (37) または (95) の一般解から出発したように見えるが，実は

(124)
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k\rho\frac{\partial y}{\partial t} + Fe^{-ipt}$$

の特別解の一つを見出したのである．外力 F が $x=a$ の場所に作用した場合の (124) の特解が (122) なのである．したがって (124) の一般解は，(122) に (37) の一般解である (107) を附加する必要がある．よって

$0<x<a$:

(125)
$$y_1 = \frac{Fe^{-ipt}}{\Phi}\sin\gamma(l-a)\cdot\sin\gamma x + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m e^{-i\omega_m t} + D_m e^{+i\omega_m t}\right)\cdot e^{-\frac{k}{2}t}\sin\frac{m\pi x}{l},$$

$a<x<l$:

(126)
$$y_2 = \frac{Fe^{-ipt}}{\Phi}\sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-x) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m e^{-i\omega_m t} + D_m e^{+i\omega_m t}\right)\cdot e^{-\frac{k}{2}t}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

が (124) の一般解である．C_m　D_m 等は初期条件より定められる．

一例として，$t=0$ で絃が静止していたものとすると

(127)
$$t=0 \quad にて \quad y_1=0,\quad y_2=0,\quad \dot{y}_1=0,\quad \dot{y}_2=0$$

でなければならぬ．したがって (125)，(126) より

$0<x<a$:

(128)
$$\sum(C_m+D_m)\sin\frac{m\pi x}{l} = -\frac{F}{\Phi}\sin\gamma(l-a)\cdot\sin\gamma x,$$
$$\sum\left[(C_m-D_m) - i\frac{k}{2\omega_m}(C_m+D_m)\right]\sin\frac{m\pi x}{l} = -\frac{F}{\Phi}\frac{p}{\omega_m}\sin\gamma(l-a)\cdot\sin\gamma x.$$

$a<x<l$:

(129)
$$\sum(C_m+D_m)\sin\frac{m\pi x}{l} = -\frac{F}{\Phi}\sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-x),$$
$$\sum\left[(C_m-D_m) - i\frac{k}{2\omega_m}(C_m+D_m)\right]\sin\frac{m\pi x}{l} = -\frac{F}{\Phi}\frac{p}{\omega_m}\sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-x).$$

となる．この左辺に $\sin\frac{n\pi x}{l}$ をかけて０から l まで積分すると $C_n \pm D_n$ が分離できるが，その場合右辺は $0<x<a$ または $a<x<l$ の区間でしか成立しない函数であるため，両辺に同じ形の運算を施すことができないから，（128）と（129）を適当に組合せ，０ から l までの積分が可能の形にする．その結果は

（130）
$$C_n + D_n = -\frac{2}{l}\frac{F}{\Phi}\left[\int_0^a \sin\gamma(l-a)\cdot\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_a^l \sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right],$$

（131）
$$C_n - D_n = -\frac{2}{l}\frac{p}{\omega'_m}\left(1+i\frac{k}{2p}\right)\cdot\frac{F}{\Phi}\left[\int_0^a \sin\gamma(l-a)\cdot\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_a^l \sin\gamma a\cdot\sin\gamma(l-a)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right],$$

よって

（132）
$$C_n = -\left(1+\frac{p}{\omega'_m}+i\frac{k}{2\omega'}\right)\frac{F}{l\Phi}\left[\sin\gamma(l-a)\int_0^a \sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \sin\gamma a\int_a^l \sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$
$$D_n = -\left(1-\frac{p}{\omega'_m}-i\frac{k}{2\omega'}\right)\frac{F}{l\Phi}\left[\sin\gamma(l-a)\int_0^a \sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \sin\gamma a\int_a^l \sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

となる．なお

（133）
$$\int_a^l \sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^{l-a}\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi(l-x)}{l}dx = -(-1)^n\int_0^{l-a}\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

であり，また

（134）
$$\sin\gamma l = Cos\beta l\cdot\sin\alpha l + i\,Sin\beta l\cdot\cos\alpha l,$$

（135）
$$\int_0^l \sin\gamma x\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}dx = -\frac{2m\pi}{l}\left[(-1)^m\frac{\left\{\beta^2+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2\right\}Cos\beta l\cdot\sin\alpha l - 2\alpha\beta\,Sin\beta l\cdot\cos\alpha l}{\left\{\beta^2+\left(\alpha-\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}\left\{\beta^2+\left(\alpha+\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}} - i\frac{(-1)^m\left\{\beta^2+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2\right\}Sin\beta l\cdot\sin\alpha l + 2\alpha\beta\left\{(-)^m Sin\beta l\cdot\cos\alpha l - 1\right\}}{\left\{\beta^2+\left(\alpha-\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}\beta^2+\left\{\left(\alpha+\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}}\right]$$

である．

よって静止していた絃に $t=0$ の時刻に Fe^{-ipt} なる力が作用し始めたときの解は

$0<x<a$：

$$y=\frac{F}{\Phi}\sin\gamma(l-a)\cdot\Bigg[e^{-ipt}\sin\gamma x+\frac{1}{l}\sum_n\Bigg\{\left(1+\frac{p}{\omega_n'}+i\frac{k}{2\omega_n'}\right)e^{-i\omega_n' t}+\left(1-\frac{p}{\omega_n'}-i\frac{k}{2\omega_n'}\right)e^{-i\omega n' t}\Bigg\}e^{-\frac{k}{2}l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\int_0^a\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{\sin\gamma a}{\sin\gamma(l-a)}\int_a^l\sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)\Bigg] \tag{136}$$

$a<x<l$：

$$y_2=\frac{F}{\Phi}\sin\gamma a\cdot\Bigg[e^{-ipt}\sin\gamma(l-x)+\sum_n\Bigg\{\left(1+\frac{p}{\omega_n'}+i\frac{k}{2\omega_n'}\right)e^{-i\omega_n' t}+\left(1-\frac{p}{\omega_n'}-i\frac{k}{2\omega_n'}\right)e^{-i\omega n' t}\Bigg\}e^{-\frac{k}{2}l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^{l-a}\sin\gamma(l-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{\sin\gamma(l-a)}{\sin\gamma a}\int_0^a\sin\gamma x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\Bigg)\Bigg] \tag{137}$$

この結果は，γが複素数であるため，定常状態のみを扱うとしても，かなり繁雑であるが，強制力の大きさ Fとその交番角速度p が与えられ，かつ絃の線密度ρ ，張力P および制動係数 kが既知であれば任意の長さ l なる絃の任意の点 $x=a$ に外力が作用した場合の任意の時刻の絃の各点の振幅分布の形が決定できる．次に定常状態解の実数形を示しておく．

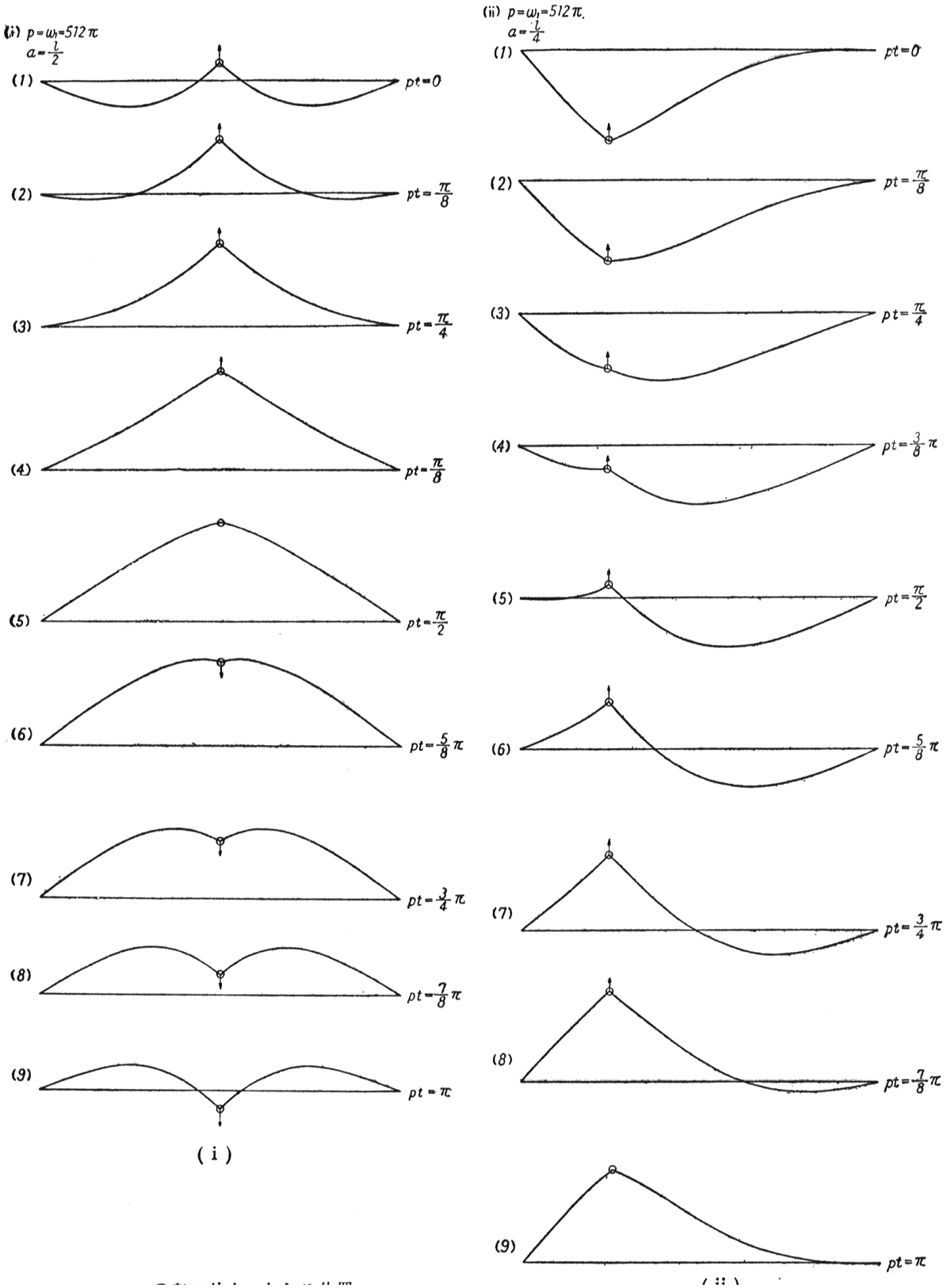
$$y_1=\frac{|F|}{2|\Phi|}|\sin\gamma(l-a)|\left[e^{-\beta x}\sin(\alpha x-pt+\upsilon_1-\phi+\varphi)+e^{\beta x}\sin(\alpha x+pt-\upsilon_1+\phi-\varphi)\right],$$
$$y_2=\frac{|F|}{2|\Phi|}|\sin\gamma a|\left[e^{-\beta(l-x)}\sin\{\alpha(l-x)-pt+\upsilon_2-\phi+\varphi\}+e^{\beta(l-x)}\sin\{\alpha(l-x)+pt-\upsilon_2-\phi-\varphi\}\right], \tag{137－1}$$

または形を変えて

$$y_1=\frac{|F|}{|\Phi|}|\sin\gamma(l-a)|\left[Cos\beta x\cdot\sin\alpha x\cdot\cos(pt+\upsilon_1-\phi+\varphi)+Sin\beta x\cdot\cos\alpha x\cdot\sin(pt+\upsilon_1-\phi+\varphi)\right],$$
$$y_2=\frac{|F|}{|\Phi|}|\sin\gamma a|\left[Cos\beta(l-x)\cdot\cos\alpha(l-x)\cdot\cos(pt+\upsilon_2-\phi+\varphi)+Sin\beta(l-x)\cdot\cos\alpha(l-x)\cdot\sin(pt+\upsilon_2-\phi+\varphi)\right], \tag{137－2}$$

ただし

$$F=|F|e^{i\varphi},\ \sin\gamma(l-a)=|\sin\gamma(l-a)|e^{i\upsilon_1},\ \sin\gamma a=|\sin\gamma a|e^{i\upsilon_2},$$
$$\Phi=|\Phi|e^{+i\phi}=\Phi_r+i\Phi_i$$
$$\Phi_r=\alpha P\sin\alpha l\cdot Cos\beta l-\beta P\cos\alpha l\cdot Sin\beta l-\frac{\alpha pk\rho}{\alpha^2+\beta^2}\{\cos\alpha l\cdot Sin\beta l-\cos\alpha(l-a)\cdot Sin\beta(l-a)-\cos\alpha a\cdot Sin\beta a\}+\frac{\beta pk\rho}{\alpha^2+\beta^2}\{\sin\alpha l\cdot Cos\beta l-\sin\alpha(l-a)\cdot Cos\beta(l-a)-\sin\alpha a\cdot Cos\beta a\},$$

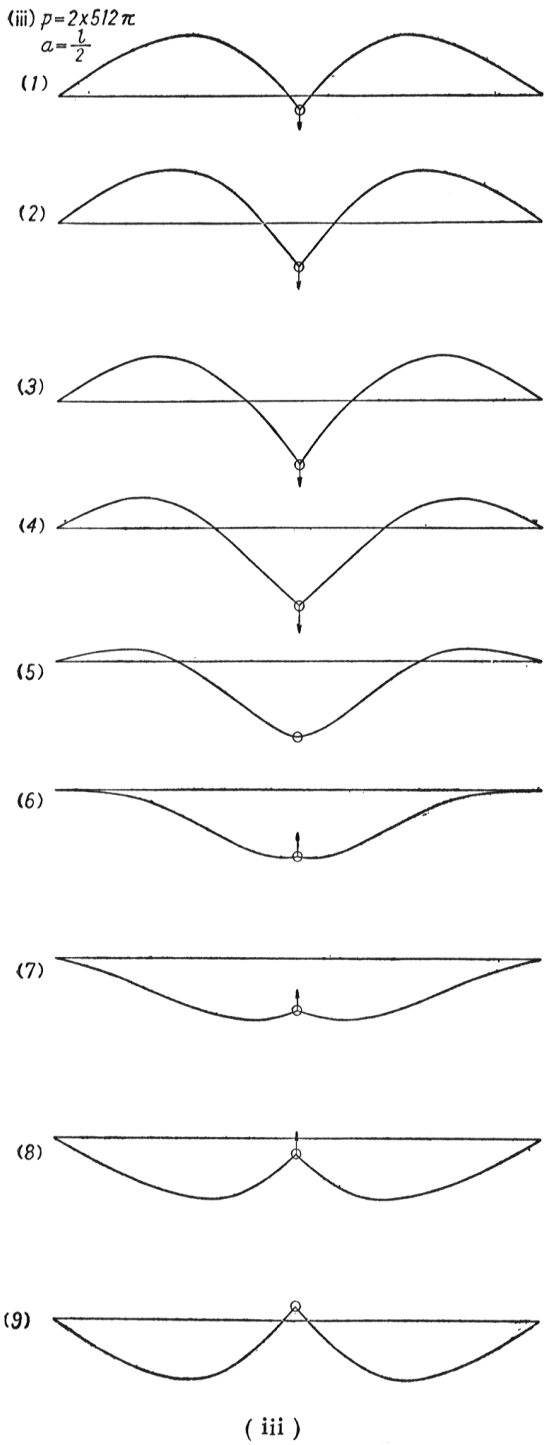


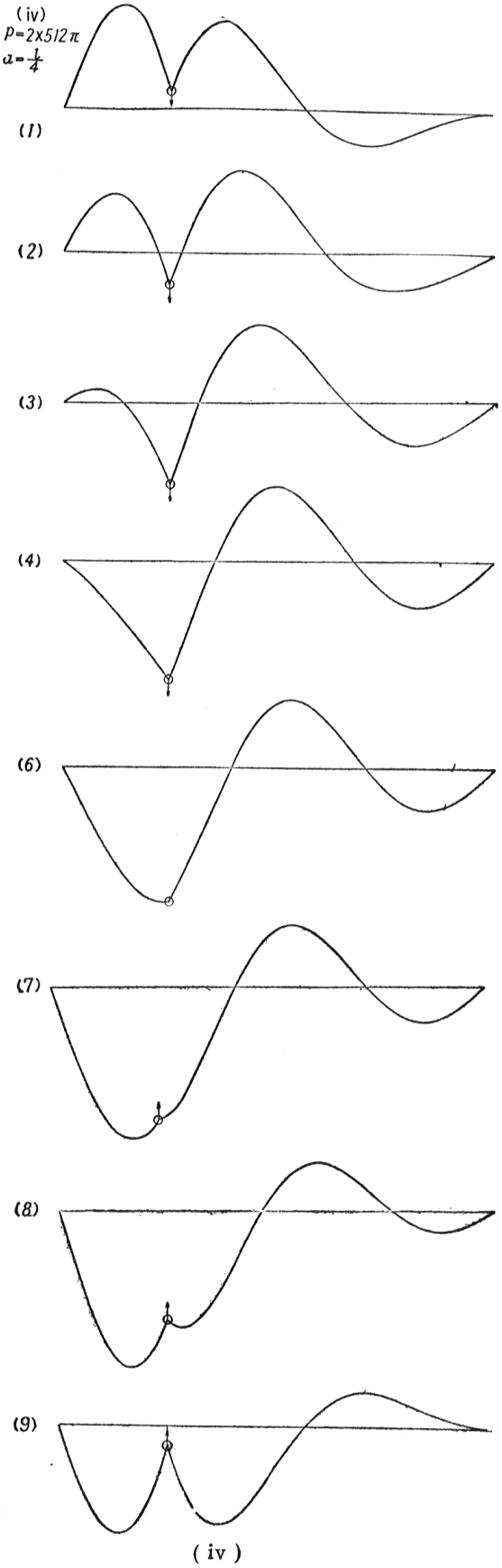
0印は外力の加わる位置

定数: $l=1\ (m)$, $\rho=0.001\ (\mathrm{kg/m})$, $c=512\ (\mathrm{m/s})$, $\omega_1=2\pi\times256\ (\mathrm{rad/s})$,

$k=2\,c\beta=2\times512\times0.01=10.24$, $\tau=0.195\ (\mathrm{s})$.

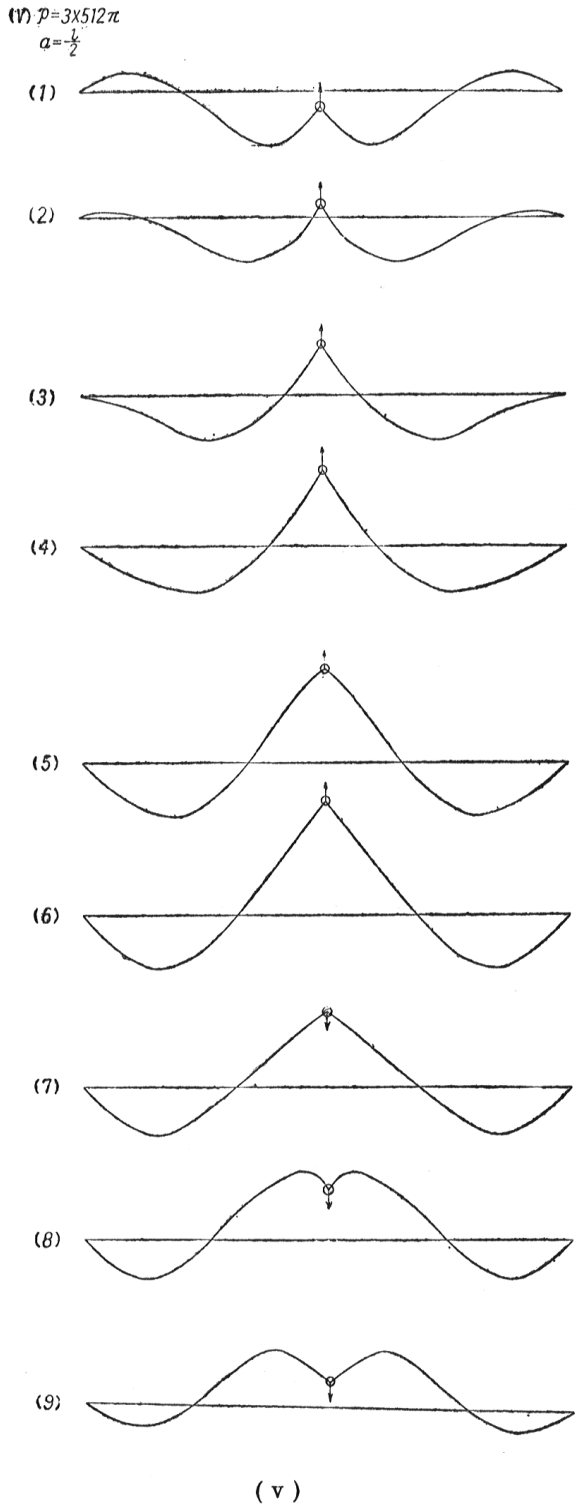
第2・11図　抵抗損失の大きな絃を強制振動した場合の定常状態振動姿態の例.

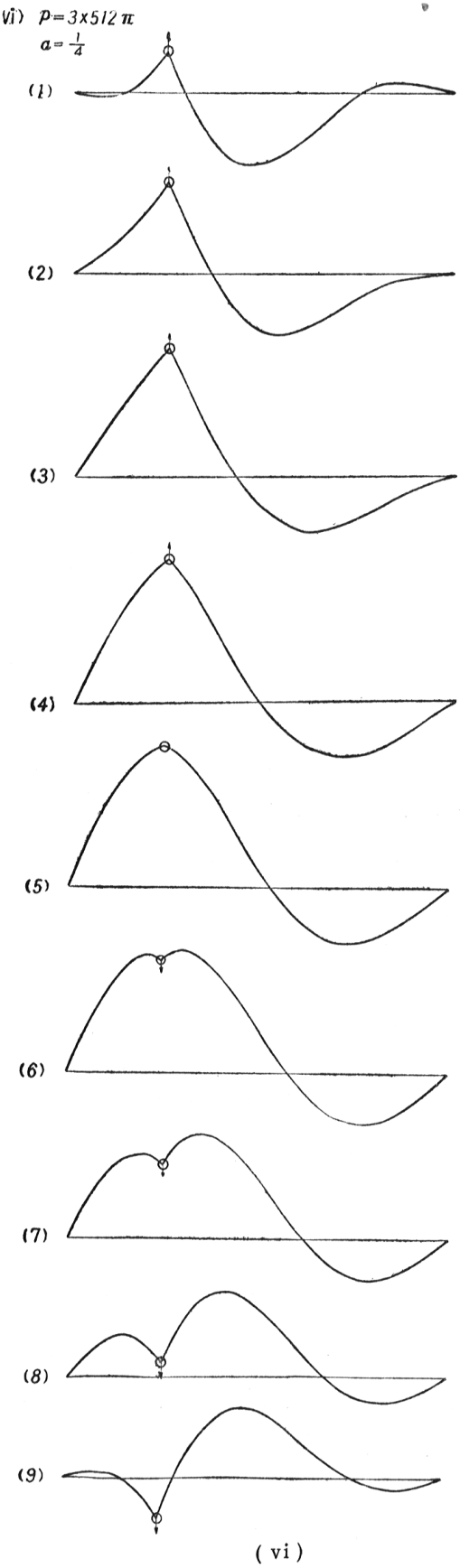




第 2・11 図（続き）

第２.11図（続き）





第 2・11 図（続き）

第2・11図(続き)

$$\Phi_r = \alpha P\cos\alpha l \cdot Sin\beta l - \beta P\sin\alpha l \cdot Cos\beta l$$
$$+\frac{\alpha pk\rho}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\sin\alpha l \cdot Cos\beta l - \sin\alpha(l-a)\cdot Cos\beta(l-a) - \sin\alpha a \cdot Cos\beta a\right\}$$
$$+\frac{\beta pk\rho}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\cos\alpha l \cdot Sin\beta l - \cos\alpha(l-a)\cdot Sin\beta(l-a) - \cos\alpha a \cdot Sin\beta a\right\},$$
$$\phi = \tan^{-1}(\Phi_i / \Phi_r),$$
$$|\sin\gamma u| = \sqrt{(\sin\alpha u \cdot Cos\beta u)^2 + (\cos\alpha u \cdot Sin\beta u)^2},$$
$$\upsilon_i = \tan^{-1}\left[\cot\alpha u \cdot Tan\beta u\right].$$

ただしαaまたは $\alpha(l-a)$が第三象限(πと $\frac{2}{3}\pi$ との間)にあるときは, $-|\sin\gamma a|$ または $-|\sin\gamma(l-a)|$とする.

この結果を用いて絃の振動姿態を描いたのが**第2・11図**であり，これは**定在波**(3)を形成する.

なお Morse は**2・1・5**および**2.1.10**で述べる方法を用いて，これと同様の結果を得ている.(3)

2・1・5　槌で打った絃の自由振動

次に衝撃性外力により励振される絃の振動を解いてみよう．これは絃を槌で打つような場合であり**ピアノの発音機構**に関係がある．この場合は，力の加わる位置が $x=a$ の近くのごく狭い区間に局限され，かつ力の加わっている時間がきわめて短い時間(1)に限定されるので，このような力の函数形を xと tとの函数として表現し，その力で強制された絃の，力を取り去った後に残る自由振動形を求めねばならない．そのために，最初は外力が絃上に任意の形で分布している場合の一般的解法から出発する.

絃上に分布する外力の形を $Y(x,t)$と書くと，絃の運動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k\rho\frac{\partial y}{\partial t} + Y(x,t) \qquad (\mathrm{N/m}) \tag{138}$$

となり上の式は最も**一般的な絃の強制振動方程式**である．もしも減衰が無視できる場合は, $k=0$ とすればよい.（138）はまた

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k\frac{\partial y}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{Y(x,t)}{\rho} \qquad (\mathrm{N/kg}) \tag{139}$$

と書くことができる．よって$Y(x,t)$の形が任意に与えられている場合に（139）から y を決定することができれば，弦の運動は明らかとなる.

固定絃の波動函数は直交性を有するので，これを級数形で用いることにより，絃上に分布する任意の形状を表現することができるから，長さl なる固定絃に使用する外力の分布函数形 $Y(x,t)$ は

---

(3) standing wave
(4) P.M.MORSE:"Vibra t ion and sound" Ⅲ. 13,McGraw HiII・1936.
(1) 10^{-6} 秒（μs）で測られる長さ.

(140)
$$\frac{Y(x,t)}{\rho} = f_1(t)\cdot\sin\frac{\pi x}{l} + f_2(t)\cdot\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots + f_s(t)\cdot\sin\frac{s\pi x}{l} + \cdots$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} f_s(t)\cdot\sin\frac{s\pi x}{l}$$

と表現できる．一方また l なる長さの固定絃が振動する場合の変位分布 $y(x,t)$ も，やはりその波動函数の級数で表現することができる筈であり，その形は

(141)
$$y = \sum_{s=1}^{\infty} \eta_s(t)\cdot\sin\frac{s\pi x}{l}$$

と書かれる．ここに $\eta_s(t)$ は未定の振幅であり，時間 tの函数である．外力（140）によって強制されて振動する絃の変位を（139）から求めるには,（140）と（141）を（139）に代入し， $f_s(t)$ に対応する $\eta_s(t)$ を求めればよく， $\eta_s(t)$ の満足せねばならぬ条件として

(142)
$$\frac{\partial^2\eta_s}{\partial t^2} + k\frac{\partial\eta_s}{\partial t} + \omega_s{}^2\eta_s = f_s(t),$$
$$\omega_s = \frac{s\pi c}{l}$$

を得る．（142）は

(143)
$$\eta_s = e^{-\frac{k}{2}t}\xi_s$$

とおけば

(144)
$$\frac{\partial^2\xi_s}{\partial t^2} + \omega_s{}'^2\xi_s = e^{\frac{k}{2}t} f_s(t),$$
$$\omega_s{}'^2 = \omega_s{}^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \omega_s{}^2\left[1 - \left(\frac{k}{2\omega_s}\right)^2\right]$$

となるので，**1・2** の（19）を用いて解くことができ,

(145)
$$\xi_s = \frac{1}{\omega_s{}'}\sin\omega_s{}'t\int e^{\frac{k}{2}t} f_s(t)\cos\omega_s{}'t\,dt - \frac{1}{\omega_s{}'}\cos\omega_s{}'t\int e^{\frac{k}{2}t} f_s(t)\sin\omega_s{}'t\,dt,$$

したがって

(146)
$$\eta_s = e^{-\frac{k}{2}t}\left[A\cos\omega_s{}'t + B\sin\omega_s{}'t\right],$$

(147)
$$A_s = -\frac{1}{\omega_s{}'}\int e^{\frac{k}{2}t} f_s(t)\sin\omega_s{}'t\,dt,$$

(148)
$$B_s = +\frac{1}{\omega_s{}'}\int e^{\frac{k}{2}t} f_s(t)\cos\omega_s{}'t\,dt,$$

となる．よって変位 tは

(149)
$$y = \sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\cos\omega_s{}'t + B_s\cos\omega_s{}'t\right)e^{-\frac{k}{2}t}\sin\frac{s\pi x}{l}$$

である（**1·3・2** の（19）参照）．A_s　B_sを定めるには　$f_s(t)$の具体的な形を知る必要がある．なお（149）は一般解であり，定常項と共に過渡項も含まれている．

きわめて短い時間だけ作用する衝撃性外力[2]を表現するには**衝撃函数**[3]を用いる．衝撃函数にも色々の形のものがあるが，代数函数を用いて，短時間の間だけ作用する衝撃力を表現するには**1・2**で述べた

（150）
$$f_s = \frac{C_s}{\pi}\frac{\tau}{t^2+\tau^2}$$

がよい．減衰項　k　が０の場合にこれを用いて解いた例は **LAMB**[4]の著書にある．k が０でない場合は（150）を用いて（147）（148）の積分を行うのは面倒となる．それに反して，もう一つの衝撃函数

（151）
$$f_s(t) = \frac{C_s}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}}{\tau}$$

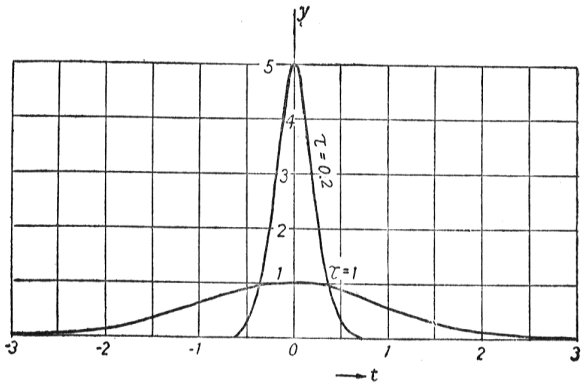
を用いると都合がよい．この函数形は **STRATTON**[5]の著書に示されている．（151）を用いて（147）（148）から衝撃力の作用し終った後の振幅函数を計算すると

（152）
$$\left.\begin{matrix}A_s\\B_s\end{matrix}\right\} = \mp\frac{C_s}{\sqrt{2\pi}\,\tau\omega_s'}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2\tau^2}+\frac{k}{2}}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\,\omega_s' t\,dt$$

$$= \mp\frac{C_s}{\omega_s'}e^{-\frac{\tau^2}{2}\left(\omega s'^2-\frac{k^2}{4}\right)}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\left(\frac{\omega_{s'}\tau^2 k}{2}\right)$$

となる．[6] よって絃の第 s倍音振動の変位は

（153）
$$y_s = \frac{C_s}{\omega_s'}\sin\frac{s\pi x}{l}\cdot\sin\omega_s'\left(t-\frac{k\tau^2}{2}\right)\cdot e^{-\frac{k}{2}t-\frac{\tau^2}{2}\left(\omega_s'^2-\frac{k^2}{4}\right)},$$



t	$e^{-\frac{t^2}{2t^2}}$	t	$e^{-\frac{t^2}{2t^2}}$
0 τ	1	τ	0.607
0.2 τ	0.980	$\sqrt{2}$ τ	0.368
0.4 τ	0.923	2 τ	0.135
0.6 τ	0.835	3 τ	0.011
0.8 τ	0.726	4 τ	0.000335

第2・12図　$y = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t^2}{2t^2}}$.

（2） impulse,impulsive force
（3） impulse function
（4） H.LAMB:"Dynamical Theory of sound''Edward Arnold & Co.London.1931.
（5） J.A.STRATTON:"Electfomagnetic Theory''McGraw Hill co.,1941.
（6） $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2(x^2-2\lambda x)}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\,pxdx = \sqrt{\frac{\pi}{q}}e^{-\frac{p^2}{4q^2}+q^2\lambda^2}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\,p\lambda$.　Bierens De HAAN　定積分表

これを見ると衝撃力の作用し終わった後の絃の変位分布の第s 倍音成分波の形は$\sin\frac{s\pi x}{l}$ であり，その振幅は $\frac{C_s}{\omega_s'}$ ，その振動角速度は ω_s'（自由周期）であるが，初期位相に相当する位相 $\frac{-k\tau^2}{2}$ を有し，減衰の形が時間と共に $e^{-\frac{k}{2}t}$ にしたがっていることが示されている他に，槌が絃に接触する時間 τ によって絃の振動の振幅が制限され，その大きさは

(154)
$$e^{-\frac{\tau^2}{2}\left(\omega s'^2-\frac{k^2}{4}\right)}$$

であることが明らかである．なお C_s は与えられた衝撃の大きさで定まる振幅であるが，その大きさは次のようにして定める．衝撃力の大きさは，(151) と (140) より

(155)
$$\frac{1}{\rho}Y(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{C_s}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}}{\tau}\sin\frac{s\pi x}{l}\quad(\mathrm{N/kg})$$

とかける．この力は $t=0$ の近くの τ なる時間の間しか作用していない．よってこの力が作用したときの**全力積**は

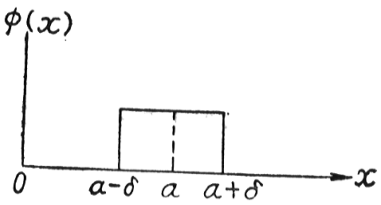
(156)
$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\rho}Y(x,t)dt=\sum\frac{C_s}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{s\pi x}{l}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}}{\tau}dt$$
$$=\sum C_s\sin\frac{s\pi x}{l},$$

ただし

(157)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2\pi^2}}}{\tau}dt\equiv\sqrt{2\pi}.$$

a

さて (156) の力積が $x=a$ なる点の前後の δ なる範囲に集中していたとすれば，$\phi(x)$ の形は $x=a-\delta$ と $x+\delta$ の間でのみ値を持ち他の区間では0となるような函数形でなければならぬ．このような形が与えられたとすると



第 2・13 図

(158)
$$\int_0^l\phi(x)dx=\int_{a-\delta}^{a+\delta}\phi(x)dx$$

と書くことができ，外力により絃にあたえられる運動量を μ とすると

(159)
$$\mu=\int_0^l\rho\phi(x)dx=\rho\int_{a-\delta}^{a+\delta}\phi(x)dx\qquad(\mathrm{N\cdot s})\ \text{または}\ (\mathrm{kg\cdot m/s})$$

なる関係がある．よって (156) に $\sin\frac{n\pi x}{l}$ をかけ0から l まで積分すると **FOURIER の定理**により

(160)
$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{a-\delta}^{a+\delta}\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$\approx\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}\int_{a-\delta}^{a+\delta}\phi(x)dx=\frac{2\mu}{l\rho}\sin\frac{n\pi a}{l}$$

を得る．ここには μ は槌の持っていた運動量(7)と考えることができ，(153) は

(161)
$$y_n=\frac{2\mu}{\omega_n'\rho l}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\omega_n'\left(t-\frac{k\tau^2}{2}\right)e^{-\frac{k}{2}t-\frac{\tau^2}{2}\left(\omega_n'^2-\frac{k^2}{4}\right)}$$

(7) momentum

とかけ，変位の合成された形は

(162)
$$y=\frac{2\mu}{\rho l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n'}e^{-\frac{k}{2}t}\sin\frac{n\pi a}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\omega_n'\left(t-\frac{k\tau^2}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\tau^2}{2}\left(\omega_n'^2-\frac{k^2}{4}\right)},$$

$$\omega_n'=\frac{n\pi c}{l}\sqrt{1-\left(\frac{l}{n\pi c}\cdot\frac{k}{2}\right)^2}=\sqrt{\omega_n^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2},\qquad \omega_n=\frac{n\pi c}{l}$$

となる．

この振動の特徴は倍音が $\frac{1}{n}$ に比例して減衰することであり，[8]前の引いて放す場合に比較して倍音成分を豊富に含む．このことは**ピアノ**のような楽器の音色を特徴づける要素であるが，第７倍音以上の奇数次高調波は音色をきたなく混らせるので，これをなるべく消すために，ピアノでは，絃を打っ位置 $x=a$ を $\frac{l}{8}$ の所に選んでおき，かつフェルトのようなやわらかな槌で打つ．[9]

なお $k=0$ とし衝撃函数に（150）を用いた結果は

(163)
$$y=\frac{2\mu}{\rho\pi c}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi c}{l}\tau}\sin\frac{n\pi a}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi ct}{l}$$

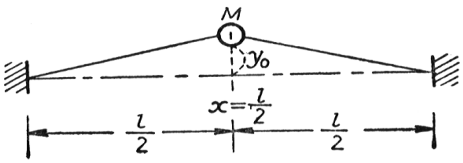
である．[10]

2・1・6　錘の付いた絃の自由振動

固定絃の中央に質量 M なる錘が吊されている振動系を解いてみよう．絃の質量を無視した場合は1の方法で解けるが，絃の線密度を ρ とし張力を P とするときにこの連動系がどんな振動をするか調べてみる**(第2･14図)**．いま M の横方向(絃と直角方向)の変位が

(164)
$$y_0=y_0\cos(\omega t-\alpha)$$

であったと仮定すると，絃の各点の変位は（117）より



第 2・14 図

(165)
$$y_1=\frac{\sin\frac{\omega x}{c}}{\sin\frac{\omega l}{2c}}y_0\cos(\omega t-\alpha),\qquad\left(0<x<\frac{l}{2}\right),$$

$$y_2=\frac{\sin\frac{\omega(l-x)}{c}}{\sin\frac{\omega l}{2c}}y_0\cos(\omega t-\alpha),\qquad\left(\frac{l}{2}<x<l\right)$$

と書ける．何となれば，この式は $x=0$ および $x=l$ で $y=0$ となり $x=\frac{l}{2}$ で（164）と等しくなりかつ波動方程式を満足する．次に $x=\frac{l}{2}$ において，絃の張力と錘の加速度による力とが平衡していなければならぬことから

---

(8)　音の強さは $\frac{1}{n^2}$ に比例する．具体的に数値例は **9･5** 参照．

(9)　ピアノは 1/8 の所を打つように設計すると，槌の幅があるので第 7，8，9 倍音が同時に消去される．

(10)　H.LAMB:前掲，103 頁．

(166)　$$M\ddot{y} = P\left(y_2' - y_1'\right), \qquad \left(x = \frac{l}{2}\right)$$

でなければならぬ．これに（165）および $c^2 = P/\rho$ を適用すると

(167)　$$\frac{M}{\rho l}\cdot\frac{\omega l}{2c} = \cot\frac{\omega l}{2c}$$

となるので

(168)　$$\frac{\omega l}{2c} = u, \qquad \frac{M}{\rho} = b$$

とおけば

(169)　$$\cot u = \frac{b}{l}u \quad \text{または} \quad u\tan u = \frac{l}{b}$$

なる超越方程式の根として u の取り得る $u_1, u_2, u_3, \cdots$ を決定することができる．このような超越方程式[1]の根を求めるには，（169）の各辺を

(170)　$$y = \cot u \quad \text{および} \quad y = \frac{b}{l}u$$

とかき，u を横軸にして同一のグラフ上に両者を描き，その交点に対応する u の値を求める（**第2・15図**）．この根は b が小さな範囲では近似的に

(171)　$$u \approx \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \cdots$$

の近くに存在するが，正確な値はこれより小さい所にある．したがって錘のない絃の場合より振動数は低下する．またもしも M ならば $\frac{l}{b} \approx 0$ となり，必然的に u は小さな値となるので（169）は

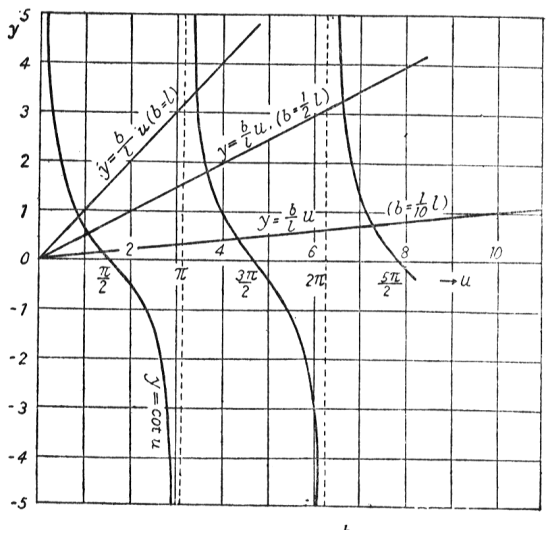
(172)　$$u^2 = \frac{l}{b}$$

となり

(173)　$$\omega = \frac{2c}{\sqrt{(lb)}} = 2\sqrt{\frac{P}{Ml}}\ (\mathrm{rad/s}).$$

よって**1・1**の結果と一致する．なお**第2・15図**から u の値を精密に求める方法は**2・3・4**で述べる．

この解法は，絃の端の支持物が運動をするような場合にも適用することができるので，種々の固定条件による振動姿態の変化を知ることができる．[2]



第　2・15　図　　$\cot = \frac{b}{l}u$ の図式解.

(1) transcendental equation. 代数方程式以外の方程式の総称.
(2) P.M.MORSE: 前掲, Ⅲ,10.

2・1・7　吊した鎖の振動

この問題は音響には大して重要な関係を持っていないが，振動の問題として歴史的に有名な問題である．鎖の線密度を ρ とし，静止位置の最下端を座標原点 O とし，上向きに座標 x を取り，これに垂直な方向の変位を y とする．振動は xy 面内にのみ生ずるものと仮定し，鎖の下部から x なる点の張力を P とすると

(174)　$$P=\rho g x$$

であるから，横方向に対する運動方程式は

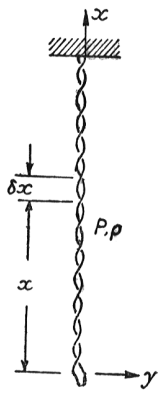
(175)　$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

または

(176)　$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

となる.(1) もしも y が時間に対して $\cos(\omega t-\varphi)$ なる変化をする場合には（176）は

(177)　$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\omega^2}{g}y=0$$



第２･16図

となり，これを解けば変位 y の x 軸に関する分布の形が定まる．（177）は級数法を用いて積分することができるが，次の方法で解けばさらに容易である．絃の場合から類推すると，x 点の波動伝播速度は，$\sqrt{P/\rho}$ すなわち $\sqrt{gx}$ である．よって O から x 点まで波が伝わる時間は

(178)　$$\tau=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{gx}}=2\sqrt{\frac{x}{g}}\qquad\text{(s)}$$

である．これを用いて x を τ で表わせば

(179)　$$x=\frac{1}{4}g\tau^2\qquad\text{(m)}$$

とかけ，（179）を用いて（177）の x を τ で置換すると(2)

(180)　$$\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial y}{\partial\tau}+\omega^2 y=0$$

となる．これは第零階の **BESSEL の微分方程式**(3)であり，その解の内で $\tau=0$ で有限値を取るものを見出せば

(181)　$$y=C\mathrm{J}_0(\omega\tau)\cos(\omega t-\varphi),$$

ただし

(182)　$$\mathrm{J}_0(\omega\tau)=1-\frac{\omega^2\tau^2}{2^2}+\frac{\omega^4\tau^4}{2^2\cdot 4^2}\cdots$$

---

(1) 縦方向の変位は二次の微小量であるから省いている．

(2) $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial\tau}{\partial x}$

(3) BESSEL's dfferential equation of zero-order

はベッセル函数である．

境界条件は上端（ $x=l$ ）の変位が０であることであり，この位置に対応する τ は

(183)　$$\tau_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

であるから， $\tau=\tau_1$ で $y=0$ となるためには

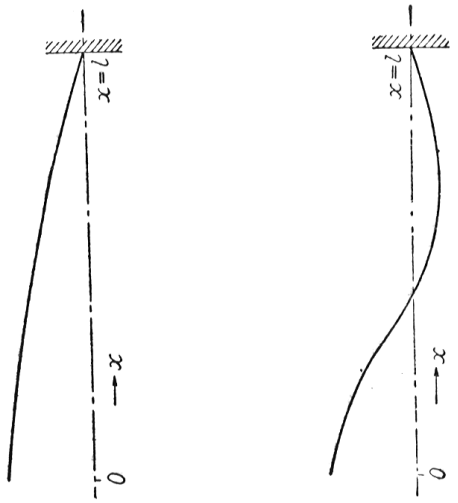
(184)　$$J_0(\omega\tau_1)=0$$

でなければならぬ．よって

(185)　$$\omega\tau_1 = 2.405,\ 5.520,\ 8.6554\ldots$$

でなければならず，これより固有振動数がさだまる．[3] この場合の変位の形は，各規準姿態について（181）を計算すると描くことができ，最低次振動姿態は**第２・17図**のようになる．なお，この問題は，**RAYLEIGH**[4]が別の近似法で解いている．

連続した運動系に多数の規準振動姿態のあることを **D.BERNOULLI**（1732）が初めて見出したこと，およびベッセル函数が始めて出現したことでこの問題は歴史的に有名である．[5]



(a)　$\omega=\omega_1=\frac{2.405}{\tau_1}$.　$y \propto J_0\left(2.405\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$

(b)　$\omega=\omega_2=\frac{5.520}{\tau_1}$.　$y \propto J_0\left(5.520\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$

第 2・17 図　鎖の振動姿態．

2・1・8　密度および張力の変化する絃の振動

密度 ρ および張力 P が場所 x の函数であるような絃は一般には解くことができない．しかしある特定の条件を備えた場合には近似的に解くことができ，しかもこのようなものが波動現象解明のための模型として有効な場合が多い．ここにはこの解法を紹介しておく．[1]

絃上の任意の点 x における張力を $P(x)$，線密度を $\rho(x)$ と記すことにすると，２点 x と $x+\delta x$ との間の δx なる長さの部分に作用する力の y 成分は

(186)　$$\left[P(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x+\delta x} - \left[P(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]_x \to \frac{\partial}{\partial x}\left\{P(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}$$

と書ける．よって運動の方程式は

(187)　$$\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

となる．（187）は一般式である．変位 y が時間と共に振動する場合には

(188)　$$y = u(x)e^{-i\omega t}$$

（３）ベッセル函数の零値については**２・２・４**参照のこと．

（４）RAYLEIGH:"Theory of sound" または H.LAMB:前掲、31a.

（５）GRAY and MATHEWS:"Treatise on BesseI Functions"London,1895 に MEISSEL 等が作った最初のベッセル函数表が掲げてある．

（１）SLATER and FRANK “Introduction to Theoretical Physics” McGraw-Hill,1933.

とおけば $u(x)$ の満足せねばならぬ条件式として

(189)
$$\frac{d}{dx}\left\{P(x)\frac{du(x)}{dx}\right\}+\omega^2\rho(x)u(x)=0$$

を得る．

(189) を解き得る一つの場合は張力および密度の場所による変化の仕方が**緩慢**(2)な場合である．(189) は変係数の第二階線型微分方程式であるから正確な解を求める一般的な方法は級数法以外にはない．(3)この場合 P, ρ をも x の冪級数に展開し (189) を解くのであるが，その結果は P, ρ が一定な絃の振動と余り変らないことが解る．この事実が，以下に述べる有力な近似解法の基礎をなし，殊に P, ρ の変化の割合が絃の変位の一波長の内で余り大きな値にならぬ範囲では，この方法は非常によい近似値を与える．またこの近似解は形が単純であるため定性的に振動を調べるのに都合がよい．

P と ρ とが x の函数であることは，絃の振動に次の二つの変化をもたらす．その一つは波動伝播速度 υ が場所の函数となり，したがって波長 λ が場所 x の函数となることである．(4)他の一つは**波の振幅がやはり x の函数となること**である．よって $u(x)$ の形を $A\sin\frac{n\pi x}{l}$ と書く代りに

(190)
$$u=A(x)\sin\{\phi(x)\}$$

と書き，$A(x)$, $\phi(x)$ の形を (189) を満足するように定めることができればよい．それには，まず $\phi(x)$ の形を定めねばならないが，

$$\frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{2\pi}$$

が2点 x_1 x_2 間に存在する波の数を示していることに注意し，一方波長を λ とするとき

$$\frac{dx}{\lambda}$$

は dx なる区間の波の数を表わしているから x_1 と x_2 の区間の波の数は

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\lambda}$$

となることを用いて

(191)
$$\phi(x)=2\pi\int\frac{dx}{\lambda}$$

とおくことができる．しかるにまた位相定数は

(192)
$$\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{\upsilon}=\omega\sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

とかけるので (~~131~~) は

(2) slowly changing, 絃の変位 u の変化に比べて徐々に変化しているもの．
(3) P.M.MORSE: 前掲 II, 11.
(4) $\upsilon(x)=\sqrt{\frac{P}{\rho}}$, $\frac{2\pi}{\lambda}=\omega\sqrt{\frac{P}{\rho}}$.

(193)
$$\phi(x)=\omega\int\sqrt{\frac{\rho}{P}dx}$$

となる．よって（190）の形は複素形を用いて表わせば

(194)
$$u=Ae^{i\phi(x)}=Ae^{i\omega\int\sqrt{\rho/P\,dx}}$$

とかくことができる．

（194）の A を決定するために，（194）を（189）に代入すると，　A の満足すべき条件として

(195)
$$\lambda^2\left(\frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}\cdot\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\right)+4\pi i\lambda\left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\right)\right]=0$$

を得る．λ は（192）の値である．　A が緩慢に変化する場合には　$\lambda\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$　は 1 に比して遙かに小さくなるので λ^2 の項は λ の項に比して省略して考えることができ（195）は

(196)
$$\frac{d\ln A}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{d\ln P}{dx}+\frac{d\ln\rho}{dx}\right)=0,\qquad \frac{d\ln\left[A(\rho P)^{\frac{1}{4}}\right]}{dx}=0,\qquad A(\rho P)^{\frac{1}{4}}=\text{一定}$$

となる．よって（194）は

(197)
$$u=\frac{C}{\sqrt[4]{\rho P}}e^{i\left[\omega\int\sqrt{\rho/P}\,dx\right]}$$

となる．これより変位は

(198)
$$y=\frac{C}{\sqrt[4]{\rho P}}e^{i\omega\left[\int\sqrt{\rho/P}\,dx-t\right]}=\frac{C}{\sqrt[4]{\rho P}}e^{i\omega\left[\int\frac{dx}{\upsilon}-t\right]}$$

とかける．これは長い絃上を υ なる速度で伝播する自由進行波である．

絃の一端　$x=x_0$ が固定されている場合には（198）の中で　$x=x_0$　で　$y=0$　となるような形を求めねばならぬ．その形は

(199)
$$y=\frac{C}{\sqrt[4]{\rho P}}\sin\left[\omega\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\upsilon}\right]e^{-t\omega t}$$

である．

第 2･18 図

また　$x=x_0$ と　$x=x_1$ の 2 点で固定された絃に対しては（199）がさらに

(200)
$$\sin\left[\omega\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\upsilon}\right]=0$$

を満足する必要があり

(201)
$$\omega\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\upsilon}=n\pi$$

第 2･19 図

でなければならず，これより ω の取り得る固有値として

(202)
$$\omega_n=\frac{n\pi}{\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\upsilon}}$$

が定まり，第 n 倍音の振幅は

(203)
$$y_n = \left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \right) \sin\left[\omega_n \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\upsilon} \right]$$

となる． A_n　B_n は初期条件で定まる値である．この解法を **W．K．B．法**という．(4)

2.1.9　フーリエの定理

両端固定絃の波動函数を級数として用いることによって，絃の取り得る任意の変位分布を表現することができることは既に実例を示しておいたが，この性質を数学的に一般化したのが**フーリエの定理**であって，**J.B.J.FOURIER**(1)によって提唱され，現在でも重要な基本定理となっている．この定理は絃の振動理論や熱伝導の理論と密接な関連を持って発達してきたものであるが，ここで数学的に詳細な説明をすることは，いたずらに繁雑さを増すだけで余り必要性はないと思われるので，要点だけを簡単に述べておく．

長さ l なる両端固定絃が任意の初期条件によって自由振動を開始したときの変位は

(204)
$$y = \sum_n \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l},$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

で与えられ，特に $t = 0$ なる時刻の変位の函数形が $y = f(x)$ で表わされた場合には，(204) の任意定数　A_n は

(205)
$$f(x) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{l},\quad (0 < x < l)$$

より定められることは既に述べた．これは **FOURIER** の定理の特別の場合に該当する．これを数学的に一般化するために，絃の長さ l を三角函数の半周期 π に等しいとおくと，(205) は

(206)
$$f(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \cdots A_n \sin nx + \cdots$$

となる．(206) は**正絃級数**(2)と呼ばれ，**FOURIER** の級数の一つの特別な形である．

(206)の右辺が　$0 < x < \pi$ の区間で左辺の函数形　$f(x)$ を表現するためには，左辺の各項の振幅 A_n が特定の値を取らねばならぬが，また， A_n の値を見出すことが可能なためには $f(x)$ の函数形にもいくらかの制限が課されねばならない．しかし，振幅係数 A_n を見出し得るために $f(x)$ の備えていなければならぬ条件を数学的に規定することはかなり困難な問題を含んでいるので，ここではむしろ物理的に可能な条件によって $f(x)$ が与えられているものと考える程度に止めておく． A_n を決定するために，既に述べたように，(206) の両辺に $\sin nx$ を乗じ，0から π まで積分すると，右辺の第 m 項の形は

---

(4)　WENJZEL=KRAMARS＝BRILLOUIN Method

(1)　J.B.J.FOURIER(1768－1830)"Theorie de la Chaleur",Paris,1822.
　　フーリエの定理は H.BURKHAROT:"Entwicklung nach oscillirenden Funktionen・・"
　Leipzig,1908 にも詳しく述べられている．

(2)　sine-Series

(207)
$$A_m\int_0^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}A_m\int_0^{\pi}\left\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right\}dx$$

となり，$m\neq n$ の場合には（207）の右辺の積分値は常に零となる．しかし，もしも $m=n$ の場合には，右辺の第一項は定数１であるために０から π までの積分によって零とはならず，結局

(208)
$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

となり，A_n を決定することができる[**2・1・2**の(80)参照]．

【例 1】　$0<x<\pi$**の区間で放物線の弧を表わす形**　放物線の形が

(209)
$$f(x)=x(\pi-x)$$

であるときは，（208）より

(210)
$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{4}{\pi n^3}(1-\cos n\pi)=\left\{\begin{array}{ll}0, & (n=\text{偶数})\\ \dfrac{8}{\pi n^3}, & (n=\text{奇数})\end{array}\right\}$$

よって（206）に（210）を適用すると

(211)
$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3^3}\sin 3x+\frac{1}{5^3}\sin 5x+\cdots\right)$$

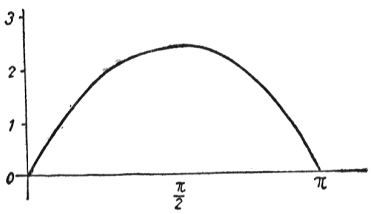
（211）の右辺の級数が左辺と等しいかどうかを調べるために $x=\dfrac{\pi}{2}$ とおいて見ると，

(212)
$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots$$

となり，結果が正いことがわかる．また，$x(\pi-x)$ を図に描いて（211）の右辺と比較すると，（211）を第三項まで取ればほとんど喰い違いがなくなることが確かめられる（**第２・20図**）．

【例 2】 三角波形　既に第２・８図に示したように，$x=0$ と $x=\pi$ とを通る二つの直線が，$x=a(0<a<\pi)$ である角度をもって交わる場合には，（81）（82））の通り $f(x)$ の形は

(213)
$$f(x)=\frac{x}{a},\qquad(0<x<a)$$
$$f(x)=\frac{\pi-x}{\pi-a},\qquad(a<x<\pi)$$



第２・20図　放物線弧

であり，

(214)
$$A_n=\frac{2}{\pi a}\int_0^{a}x\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi(\pi-a)}\int_a^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx$$
$$=\frac{2}{a(\pi-a)}\frac{1}{n^2}\sin na,$$

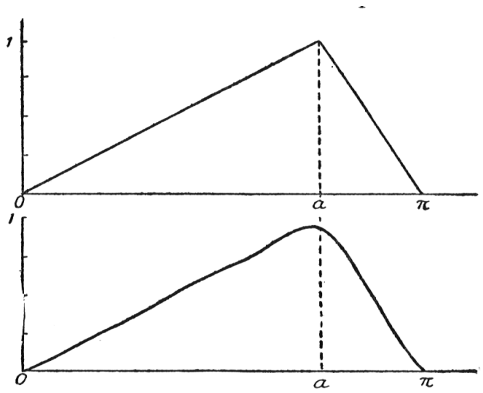
(215)
$$f(x)=\frac{2}{a(\pi-a)}\left(\sin a\cdot\sin x+\frac{1}{2^2}\sin 2a\cdot\sin 2x+\frac{1}{3^2}\sin 3a\cdot\sin 3x+\cdots\right)$$

となる．

この結果検算するために　$a=\frac{\pi}{2}$，　$x=\frac{\pi}{2}$　とおくと

(216)
$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

となり，これは正しいことが証明されている．なおこの級数の精度を調べるために，$a=\frac{3}{4}\pi$ とおき第8項まで取って描いて見ると**第2・21図**のようになり，詳細な点では一致しないが大体の形は表わされている．この場合，級数の項を多く取れば取るだけ精確に一致するようになるが，後で述べる理由から，余り項数を多く取ることも実際には意味がない．また，この場合，第4項と第8項は　$x=a$　にて節を生ずる姿態なので零となり，結果には何の寄与もしていない．



第2・21図　三角波形

【例 3】 原点を通らない直線

(217)
$$f(x)=\pi-x$$

の場合には

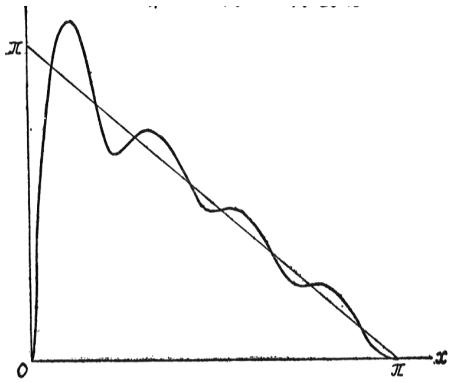
(218)
$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\cancel{\pi}}$$

となり

(219)
$$\pi-x=2\left(\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right)$$

(219) にて　$x=\frac{\pi}{2}$　とおくと

(220)
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$



第2・22図　原点を通らない直線

となり，これは円の**求平積法**(3)に関する EULER の式である．また　$x=\pi$ とおいても (219) は正しいことが示される．しかし　$x=0$　とおくと右辺は左辺と等しくならない．したがって (219) の右辺の表現が成立する範囲には制限がなければならぬことが知られる．これについては後に述べる．またこの級数は前の2例よりも収斂が悪く，最初の8項を取って描いた形は**第2・22図**のようなものである．しかし　$x=0$　を除いた任意の x における (219) の左辺の値に対し，右辺の値を所望する任意の精度の範囲内に接地させるには，級数の項数を適当な所まで増加させれば達成される．ただ　x　が小さくなればなるほど正しい形を表わすためには多くの項数を必要とするようになる．

(3)　quadrature, 曲線形と等積の正方形を求めること．

これらの例から FOURIER の定理の基本的な性質が導かれる．これは任意函数 $f(x)$ にある条件を附すことによって純数学的に証明することができるが，ここでは証明を省いて，結果のみを示しておく．いま，(206) の右辺の m 項の和を

(221)
$$f_m(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots + A_m \sin mx,$$
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

とおくと，$0 < x < \pi$ の区間において $f(x)$ が連続函数であり，しかも極大値および極小値を有限個しか有さず，かつ $x = 0$ と $x = \pi$ にて零となる場合には，任意の x における $f_m(x)$ の値は m を増加することによって局限値 $f(x)$ に収斂させることができる．この性質は，固定絃の初変位や初速度を表現するような函数形なら常に満足しているものであって[例 3]に現われてた難点は $x = 0$ で $f(x)$ が零とならぬために生じたものである。

いままでは正弦級数のみを例に取って基本的な性質を示してきたが，問題によっては次に述べる**余絃級数**(4)を用いねばならぬ場合もある．その形は，(~~164~~) にならえば

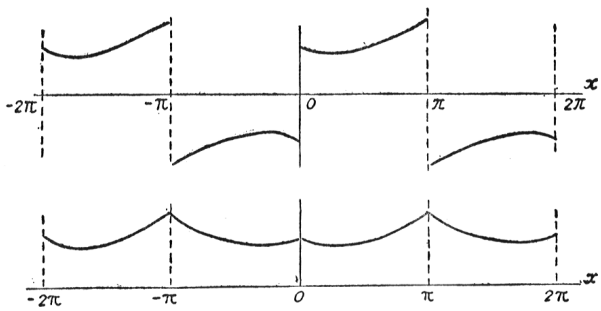
(222)
$$f_m(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_m \cos mx,$$

(223)
$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx,$$

(224)
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad (n > 0)$$

であり，もしも $f(x)$ が $0 < x < \pi$ の区間で連続であり，かつ有限個の極値を有してさえいれば，m を増加することによって $f_m(x)$ を $f(x)$ に収斂させることができる．この場合には $f(0)$ および $f(\pi)$ の値には制限を必要としない．

以上の正弦級数および余弦級数は，共に 2π を周期とする周期函数であるから，$0 < x < \pi$ の区間のみでなく無限に長い区間にわたって，2π を周期とする周期波形を表わしている．一方正弦函数は**奇函数**(5)であり，余弦函数は**偶函数**(6)である．よってこの性質を利用すると無限に続く任意の周期函数を正弦級数と余弦級数の和で表わすことができる．このことを説明するために，



第 2・23 図 0<x< πの区間で正弦級数（上図）または余弦級数（下図）で表わされた図形の例．

(4) cosme-series
(5) odd function, $f(-x) = -f(x)$ となるような函数を奇函数と呼ぶ。$f(x) = x,\ x^3,\ \sin x$ 等はその例である．
(6) even function, $f(-x) = f(x)$ となるような函数を隅函数という．$f(x) = x^2,\ x^4,\ \cos x$ 等はその例である．

$0<x<\pi$ の区間内で正弦級数または余弦級数で表わされた函数形を $0<x<\pi$ の領域外に拡張して示して見ると**第2・23図**の通りとなる．ここで注目すべきことは，正弦級数の場合に$x=0$ および $x=\pi$ で $f(x)=0$ となっていないと不連続が表われるが，余弦函教にはそのような不連続は生じないことである．

一方，xの任意の函数 $f(x)$ は

(225)
$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$$

と表わせるので，常に隅函数と奇函数の和の形に分解して書くことができる．よって，余弦級数と正弦級数を用いて $-\pi<x<\pi$の区間について $f(x)$を表現した一般形は

(226)
$$f_m(x)=A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots+A_m\cos mx$$
$$+B_1\sin x+B_2\sin 2x+\cdots+B_m\sin mx\,,$$

ただし

(227)
$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(x)+f(-x)\}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,,$$
$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x)+f(-x)\}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,,$$
$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x)-f(-x)\}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

となる．これが **FOURIER の定理の一般形**である．この場合，$f(x)$ が $-\pi<x<\pi$ の範囲で連続であり，かつ有限個の極値しか有せず，かつ $f(-\pi)=f(\pi)$であれば，m を増加することによって $f_m(x)$ は $f(x)$ に収斂し，また $-\pi<x<\pi$ 以外の領域では 2π を周期として同一波形を繰り返す．

もしも $f(x)$ が $-\pi<x<\pi$ の区間に有限個の不連続変化を有する場合でも，(226) はその不連続点を除いた範囲で正しく成立する．そして，不連続点を $x=a$ とすれば，$f_m(a)$は局限において

$$\frac{1}{2}\{f(a-0)+f(a+0)\}$$

に収斂する．ここに $f(a-0)$ は $x=a$ よりわずかに左側の $f(x)$ の値であり，$f(a+0)$ は $x=a$ よりわずかに右側の $f(x)$ の値である．このような例は**第2・23図**の正弦級数に示されていて，$x=0$ またはπの値が両側の函数値の平均値として与えられ $f(0)=f(\pi)=0$ となっている．

FOURIER の級数の係数 A_n および B_n は，nが増加するにしたがって一様にに無限小に収斂しなければならぬことは，いままでに述べたことによって明らかである．この係数の収斂性(7)についてはSTOKES が次のように述べている。

(i)もしも $f(x)$の１周期内に有限個の孤立した不連続がある場合には，係数は

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\cdots$$

(7) law of convergence

の形で零に収斂する（例は（219）および第2・22図）.

（ii）もしも $f(x)$ が至る所連続で，その第一微係数 $f'(x)$ が有限個の孤立した不連続点を有する場合には，係数は

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2}\cdots$$

にしたがって零に収斂する（例は（215）および第2・21図）.

（iii）もしも $f(x)$ と $f'(x)$ とが連続で，$f''(x)$ が孤立した不連続点を有する場合には，係数は

$$1,\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{3^3},\ \frac{1}{4^3}\cdots$$

にしたがって収斂する（例は（211）および第2・20図）.

（iv）一般に $f(x)$ とその第 $(n-1)$ 微係数までが連続で第 n 微係数がその1周期内に有限個の孤立した不連続点を有する場合には，係数 A_n ，B_n は

$$1,\ \frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{3^{n+1}},\ \frac{1}{4^{n+1}}\cdots$$

にしたがって一様に零に収斂する.

正弦級数を例に用いてこれを証明して見ると（208）を部分積分することにより

（228）
$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
$$=-\frac{1}{n}\left[\frac{2}{\pi}f(x)\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx$$

を得るが，（228）の第一頃の積分範囲は $0<x<\pi$ の間にある $f(x)$ の孤立した不連続点の間の各区間毎に分離して積分する．もしも0と π の間に不連続がなく，かつ $f(0)\neq f(\pi)$ であれば第一頃は

（229）
$$\frac{2}{n\pi}\left[f(0)-f(\pi)\cdot\cos n\pi\right]=\frac{M}{n}$$

となる．ここに M は有限確定値である．よって第 n 項の係数は M によって定まる上限を有し，$\frac{M}{n}$ の形を取る．一方第二項の定積分は n を増加すると，$\cos nx$ の交番変化のために互に打ち消し合って一様に零に収斂する．もしも0と π の区間に不連続がなく，かつ $f(0)=f(\pi)$ であれば（~~229~~）の第一項は消滅する．この場合にはさらに

（230）
$$A_n=\frac{1}{n^2}\left[\frac{2}{\pi}f'(x)\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\sin nx\,dx$$

と書くことができ，この第一項は前と同様にして M'/n^2 なる有限値を取る．このようにして STOKES の収斂の法則が証明される.

FOURIER の定理を物理現象の表現に利用する際には，常に（226）のような第 m 項までの有限項の級数で近似しておいて充分である．m の値は，その場合に必要な精度を満足するに足るだけの大きさまでに止めておけばよい．その理由は，絃を引いて放す場合を例に取って見れば，絃の柔軟性や固定

端の条件などが不完全なために，絃の振動の高次倍音の姿態は理論的な結果とは一致していないのが普通であり，さらに数学的に表現された初期条件の形は余りにも理想化されすぎたもので，実際には実現されていない．たとえば引かれた位置の絃の形が数学的に表現された形を完全に絃が満足したとすれば，大抵の絃は折れ曲ったりトンガリを生じたりして，永久変形を生じてしまう筈である．われわれは数学的表現を借りて物理現象の近似的な表現を行うことを目的としているのであって，不必要に精密な表現はむしろ避けなければならない．

FOURIER の定理は任意の波形の**高調波分析**(8)（周波数分析）に応用されている．その方法は，任意の周期函数 $f(t)$ の周期を $T(\sec)$ とすると，FOURIER の定理によって

(231)
$$f(t)=A_0+A_1\cos\frac{2\pi t}{T}+A_2\cos\frac{4\pi t}{T}+A_3\cos\frac{6\pi t}{T}+\cdots+A_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+\cdots$$
$$+B_1\sin\frac{2\pi t}{T}+B_2\sin\frac{4\pi t}{T}+B_3\sin\frac{6\pi t}{T}+\cdots+B_n\sin\frac{2n\pi t}{T}+\cdots,$$

ただし

(232)
$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$
$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt,$$
$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt \qquad (n>0)$$

と表わされる．この A_n ，B_n が第 n 次高調波成分の振幅であり，$f(x)$ から A_n ，B_n 等を求めることを高調波に分析する（またはスペクトラムに分析する）という．なお A_0 は不変量（直流成分）を表わし，A_1 と B_1 は**基本波成分**(9)である．なお非周期函数を高調波に分析することは，数学的には表現されているが，非常に困難であって実用上には利用できないと考えて差支えない．

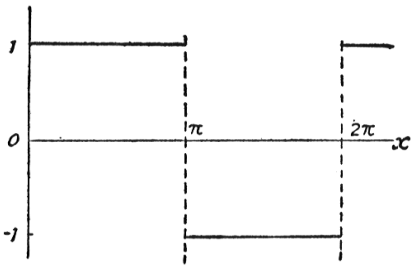
なお次に FOURIER の級数の二三の例を示しておく，

【例 4】 矩形波形（第2・24図）

(233)
$$f(x)=1,\qquad 0<x<\pi,$$
$$f(x)=-1,\qquad \pi<x<2\pi$$
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$$

【例 5】 梯形波形（第2・25図）

$$f(x)=\frac{x}{a},\qquad 0<x<\alpha,$$
$$f(x)=1,\qquad a<x<(\pi-\alpha).$$

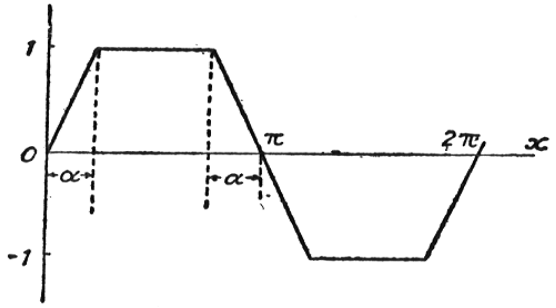


第 2・24 図 矩形波形

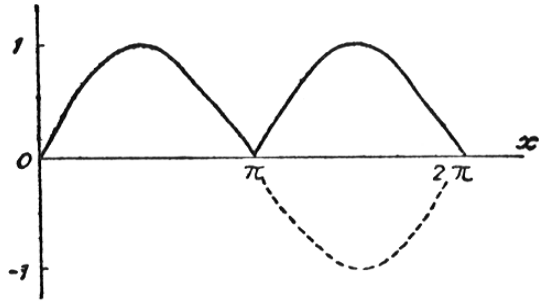
(8) harmonic analysis　　(9) fundamental componet

$$f(x)=\frac{\pi-x}{\pi-a},\qquad (\pi-\alpha)<x<\pi,$$

(234)
$$f(x)=\frac{4}{\pi\alpha}\left(\sin\alpha\cdot\sin x+\frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\cdot\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\cdot\sin 5x+\cdots\right).$$



第 2・25 図 梯形波形



第 2・26 図 両波整流波形

【例 6】　両波整流波形（第2・26図）

$$f(x)=\sin x,\qquad 0<x<\pi,$$
$$f(x)=-\sin x,\qquad \pi<x<2\pi.$$

(235)
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x-\frac{2}{5\cdot 7}\cos 6x-\cdots\right).$$

2・1・10 持続正弦波形の外力が作用する絃の定常解

任意の外力が絃上に分布している場合の一般解は**2・1・5**の（146）または（149）で与えられるが，特に外力が時間的に $\cos pt$ なる変化をする場合について，定常状態解を具体的な形で示しておく．外力の函数形を

(236)
$$Y(x,t)=F(x)\cdot\cos pt$$

とおくと，（140）の f_s は

(237)
$$f_s(t)=g_s\cos pt,$$
$$g_s=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{F(x)}{\rho}\cdot\sin\frac{s\pi x}{l}dx$$

と表わせる．よって（142）は

(238)
$$\frac{\partial^2\eta_s}{\partial t^2}+k\frac{\partial\eta_s}{\partial t}+\omega_s{}^2\eta_s=g_s\cos pt$$

となり，この解は**1・3・2**の方法を用いて

(239)
$$\eta_s(t)=\frac{g_s\cos(pt-\alpha_s)}{\sqrt{\left(\omega_s{}^2-p^2\right)^2+k^2p^2}}+e^{-\frac{k}{2}t}\left(A_s\cos\omega_s{}'t+B_s\sin\omega_s{}'t\right)$$
$$\omega_s'=\omega_s{}^2-\frac{k^2}{4},\qquad \tan\alpha=\frac{kp}{\omega_s{}^2-p^2}$$

となる．これは（146）と同じ現象を表現する解である．よって定状状態の変位を表わす形は（239）（141）とを用いて

$$y=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_s\cdot\sin\dfrac{s\pi x}{l}}{\sqrt{\left(\omega_s{}^2-p^2\right)^2+k^2p^2}}\cdot\cos\left(pt-\alpha_s\right) \tag{240}$$

$$=\frac{2}{\rho l}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\int_0^l F(x)\cdot\sin\frac{s\pi x}{l}dx\right]\cdot\frac{\sin\dfrac{s\pi x}{l}}{\sqrt{\left(\omega_s{}^2-p^2\right)^2+k^2p^2}}\cdot\cos\left(pt-\alpha_s\right)$$

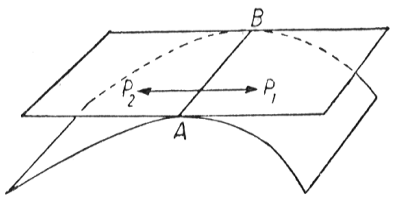
と書くことができる．これに過渡解を加えれば一般解が構成されることはいうまでもない．なおこの解は級数形であるから数項を取って加え合せねばならないが，$\omega_s{}^2-p^2$ の小さい範囲を選んで加え合せれば収斂の早い級数となる．つまり変位は強制周期に近い固有周期の成分の和で大体決定される．

2・2　膜の振動

膜の振動[1]は音響の研究において大して重要な地位を占めてはいないし，また数学的の取扱いを単純にするために設ける仮定も実現が困難なために実際の発音体として余り役に立たぬものであるが，二次元の広がりを持った振動を理解するための好適な例であり，後に二次元，三次元の空間内の波動を取扱うための基礎知識として重要なものである．ここで二次元の振動の規準振動を理解しておくことは後にさらに複雑な振動現象を理解するための階程として必要なことである．

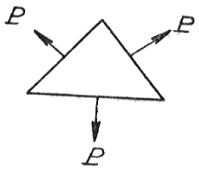
2・2・1　理想的な膜と膜の張力

理論的に考える理想膜とは一つの面であって厚さのないもの，たとえば水と空気の境界面であるとか，物の表面であるとかいうものである．しかし多少厚さがあっても，たとえばうすいゴムなどを張ったものも膜と考えられる．これらのものが理想膜と考えられるのに必要な条件はその面上に引いた一つの線素[2]の両側に作用する応力[3]が常にその面の切平面内にあることである（**第2・27図**），以下に考える膜はこの条件を満足し，かつ乱されない状態では平面となっており，さらに応力は面上至る所均等に分布している場合に限定する．

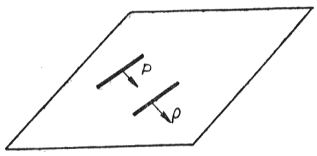


第 2・27 図　線素 AB の両側に作用する応力 P_1，P_2 がその切平面内にあることを示す．

均等応力の分布とは膜面内に二つの長さ相等しく互に平行な二線分を仮想した場合に，この二線分に作用する応力の方向および大きさが共に相等しいような応力分布をいう（**第2・28図**）．さらに問題を単純化するために任意の綿素に作用する応力は常にこの線素に垂直な方向を有すると仮定すると，単位長の線素に作用する応力 P は線素をどの方向に取っても等しいことが水力学の場合と同様の



第 2・28 図　等方性応力分布



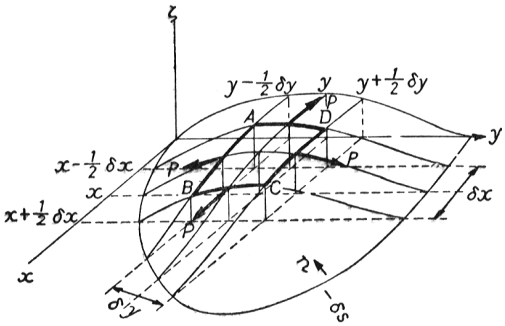
第 2・29 図　均等応力分布

（1）vibration of membranes　（2）line element　（3）stress
（4）homogemious stress

方法で証明できる．この状態を**等方性**(5)の状態といい，この P を**膜の張力**(6)と呼ぶ(**第2・~~29~~図**)．その単位は力を長さで除したもの $\left[\mathrm{MT}^{-2}\right]$ である．

2・2・2　膜の運動方程式

乱されない（平衡布置の）膜の平面を xy とし，これと直角方向の変位を ζ とす．膜の表面密度（単位面積あたりの質量）ρ $(\mathrm{kg/m^2})$ は膜の全面にわたって一様なものとし，膜上の任意の点 $(x,\ y)$ を中心とする $\delta x\delta y$ なる~~短形~~の微小面積内の質量に作用する力を考えてみる．この面積は変位をする前には xy 平面上で y 軸に平行な2直線 $x=x-\frac{1}{2}\delta x$ と $x=x+\frac{1}{2}\delta x$ および x 軸に平行な2直線 $y=y-\frac{1}{2}\delta x$ と $y=y+\frac{1}{2}\delta x$ とに囲まれた~~短形~~であるが，変位 $\zeta(x,y,t)$ が生ずると**第2・30図**の $ABCD$ のように変形する．



第 2・30 図

この場合の x 軸に平行な直線の変形後の xy 平面に対する傾斜は $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ であり，y 軸に平行な直線の変形後の傾斜は $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ である．よってこの膜素の中心 $(x,\ y)$ を通り線素 δy に平行な線分に作用する x 方向張力の ζ 成分は

$$P\frac{\partial\zeta}{\partial x}\delta y \qquad \mathrm{(N)}$$

となる．よって，$x=x-\frac{1}{2}\delta x$ および $x=x+\frac{1}{2}\delta x$ を通り δy に平行な線分 AD および BC 作用する x 方向張力の ζ 成分の和を求めると

（1）
$$\left[P\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta x\right\}-P\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\frac{1}{2}\delta x\right\}\right]\delta y$$
$$=P\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\delta x\cdot\delta y \qquad \mathrm{(N)},$$

また $y=y-\frac{1}{2}\delta x$ および $y=y+\frac{1}{2}\delta x$ を通り δx に平行な線分 AB および DC に作用する y 方向張力の ζ 成分の和は，同様にして

$$P\frac{\partial^2\zeta}{\partial \cancel{x}^2}\delta x\,\delta y \qquad \mathrm{(N)}$$

となる．よって変形する前に $\delta x\delta y$ なる~~短形~~であった膜素が変形したときに膜素に作用する力の成分は

（2）
$$P\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\delta x\,\delta y \qquad \mathrm{(N)}$$

と書くことができる．一方膜素の運動量の加速度は

---

(5)　isotropic　　(6)　tension of membrane

（3）　$$\rho\delta x\delta y\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

であるから運動方程式は

（4）　$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=P\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$　（二次元の波動方程式）

となる[1]（**EULER**[2] **1766**）．

この運動をするときに膜の持つ**運動のエネルギー**は

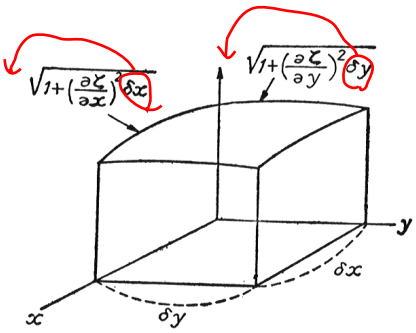
（5）　$$T=\frac{1}{2}\rho\iint\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2dxdy$$

で求められるが，**ポテンシャルエネルギー**を求めるには絃の場合と同様に２通りの考え方がある．第一の方法は膜が変位するときに生ずる伸びをその張力にさからって生じさせるのに必要な仕事量から求める．変位した膜の面積は**第２・31図**を参照して

$$\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}\delta x\delta y$$

と書けるから，張力にさからって膜の面積を拡げるのに要する仕事量は

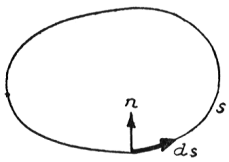
（6）　$$V=\frac{1}{2}P\iint\left\{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy.$$



第２･31図

第二の方法は垂直圧力によって膜を変形させるときに必要な仕事量から求めるもので，膜の圧力すなわち張力の垂直成分が（2）であるから，これにさからってζ だけの変位を生ずるのに必要な仕事量は

（7）　$$V=\frac{1}{2}P\iint\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\zeta\,dxdy.$$



第２･32図

である．この式は重力の理論にでてくる形であり**第２・32図**のように膜の周囲の曲線を s，その線素を ds とし，n を s の内向法線とすれば（7）は

（8）　$$V=\frac{P}{2}\int\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial n}ds+\frac{1}{2}P\iint\left\{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy.$$

（1）毛管現象の理論によれば石鹸膜の δS なる両素の辺に作用する張力は $P\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\delta S$ ，ここに R_1R_2 は表面の主曲率半径、また立体幾何により

$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}$ となるので同様の結果を得る．

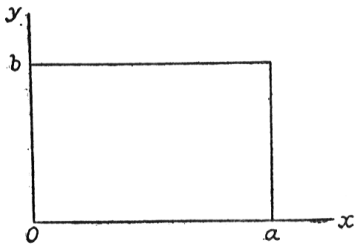
（2）Leonhard EULER ： 1707年に Bale に生まれ、 1783年 St.Petersburg で死す． 数学および力学のほとんどあらゆる分野に彼の著述が見られる．

となり,[3] もしも膜が周囲 s で固定されていれば, s 上の変位 ζ は0であるから第二項は消滅し(6)と一致する．よって(6)がポテンシャルエネルギーを与える．

2・2・3　矩形膜の規準振動姿態

２辺の長さがそれぞれ a, b なる矩形膜（周囲を固定）の規準振動を求めてみよう．

(4)にて ζ の時間函数形を $\cos(\omega t-\varphi)$ と仮定すると(4)は



第２・33図

(9)
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+k^2\zeta=0$$

ただし
$$k^2=\omega^2\frac{\rho}{P}$$

となる．(9)を解くにあたり，この膜の境界条件を考えてみると，周囲をあらわす線は

(10)
$$x=0,\quad x=a,\quad y=0,\quad y=b$$

なる４本の直線であり，この線上で $\zeta\equiv 0$ である．このような条件を適用しやすい形の解を(9)から求めるには，x と y とについて変数が分離された形であればよい．よってこのような形の一般解があるかどうかを調べてみよう．まず ζ の形が x のみの函数 $X(x)$ と y のみの函数 $Y(y)$ の積の形で表わされたものと仮定し

(11)
$$\zeta=X(x)\cdot Y(y)$$

とおいてみると，(9)は

(12)
$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+k^2=0$$

となるので

(13)
$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+k^2=-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=h^2$$

と変形でき，容易に変数が分離され x のみに関する式

(14)
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\left(k^2-h^2\right)X=0$$

とｙのみに関する式

(15)
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+h^2Y=0$$

(3)　H.LAMB:"Hydrodynamics''Cambridge,6th ed.1932,p.45.GREEN の定理.

$$+\iint\phi\frac{\partial\phi'}{\partial n}ds=-\iiint\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)\right\}dxdydz-\iiint\phi\nabla^2\phi'dxdydz.$$

この定理にて $dS\to ds$, $\phi'\to\phi$ とおき dz を省いて二次元の形に変形すればよい．**4・3・2** の脚注(7)参照.
なお GREEN の定理は
G.GREEN ："Essay on EIectricity and Magnetism" Nottingham、1828、Art.3, 参照.

とを得る．ここに h は分離定数であり，その値は物理的の条件で定められる．(14)（15）は全く同形の方程式であり，その一般解は

(16)
$$X = A_1 \cos\sqrt{k^2 - h^2}\, x + B_1 \sin\sqrt{k^2 - h^2}\, x\,,$$

(17)
$$Y = A_2 \cosh y + B_2 \sinh y$$

となるから，これに（10）の条件を適用すると h および $\sqrt{k^2 - h^2}$ の取り得る値が定まり

(18)
$$X = B_1 \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$
$$Y = B_2 \sin\frac{m\pi x}{b}, \qquad (m = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

となる．よって ζ の取り得る一つの姿態は

(19)
$$\zeta_{nm} = C_{nm} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b} \cdot \cos\left(\omega_{nm} t - \varphi_{nm}\right),$$
$$\omega^2{}_{nm} = \frac{\pi^2 P}{\rho}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \quad \text{または} \quad k^2{}_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$
$$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, \qquad m = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

である．よって矩形膜の一般解は

(20)
$$\zeta = \sum_n \sum_m C_{nm} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b} \cdot \cos\left(\omega_{nm} t - \varphi_{nm}\right)$$

である．この結果，矩形膜にも**固有値** ω_{nm} また k_{nm} が存在し，**固有振動数**および**規準振動姿態**が存在することがわかる．

矩形膜の**波動函数**は

(21)
$$\psi_{nm}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}$$

であり，

(22)
$$\int_0^b \int_0^a \psi_{nm} \cdot \psi_{n'm'}\, dx\, dy = \begin{cases} 0 & (n' \approx n, \ \text{または} \ m' \approx m), \\ \dfrac{ab}{4} & (n' = n \ \text{でかつ} \ m' = m) \end{cases}$$

なる**直交条件**を備えており，その**規準化函数**は $\dfrac{ab}{4}$ である．よって膜の変形を表す任意の函数形 $F(x,\ y)$ を波動函数の級数で展開することができ

(23)
$$F(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm}\, \psi_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{1m} \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{2m} \sin\frac{2\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}\right) + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n1} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi y}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{n2} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{2\pi y}{b}\right) + \cdots$$

なる**二重級数**で表される．これと（22）とを用いることによって $F(x,\ y)$ を表すフーリエ成分 A_{nm} を決定することができる．たとえば，初変位分布 $\phi_0(x,\ y)$ および初速度分布 $\psi_0(x,\ y)$ が与えられれば，それ以後の自由振動姿態は（24）で与えられる．

（24）
$$\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{nm}(x,y)\left(A_{nm}\cos\omega_{nm}t+B_{nm}\sin\omega_{nm}t\right),$$
$$A_{nm}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\phi_0\cdot\psi_{nm}\,dx\,dy\,,$$
$$B_{nm}=\frac{4}{\omega_{nm}ab}\int_0^a\int_0^b\phi_0\cdot\psi_{nm}\,dx\,dy\,.$$

短形膜の固有値 ω_{nm} または k_{nm} は，短形の２辺の長さの平方の比 $a^2:b^2$ が二つの整数の比に等しくない場合には，すべての異なる n と m の値に対して異なる固有値を有す．したがって，この場合には次数 n m の異なる振動姿態は互いに異なった振動数となり、同一の振動数に対して二つ以上の姿態が同時に成立することはない． n m の低い値について振動姿態を図示したのが**第2･34図**である．これより明らかなように第 n m 次姿態は y 軸に平行な n －１本の節線と，x 軸に平行な m－１本の節線を有する姿態である．なお ω_{nm} と ω_{mn} とは等しくない．

もしも $a^2:b^2$ が整数となる場合には趣が大分異なってくる．たとえば

（25）
$$\frac{a^2}{b^2}=\alpha^2\cdots\quad 整数$$

となったとすると

（26）
$$\frac{k^2{}_{nm}}{\pi^2}=\frac{1}{a^2}\left(n^2+\alpha^2m^2\right)$$

と書けるので， $\alpha m=p$ とおくとこの姿態は

（27）
$$k^2{}_{np}=\frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2+p^2\right)$$

に相当する振動数を有することになる．しかるにまた

（28）
$$k^2{}_{pn}=\frac{\pi^2}{a^2}\left(p^2+n^2\right)$$

も同じ値となる．すなわち第 np 次姿態と第 pn 次姿態とは同一の固有値 k_{pn}（または k_{np} ）を有し，したがって同じ自由振動を有することになる．そのため ω_{pn} なる振動数で振動する場合には第 np 次姿態と第 pn 次姿態とが同時に成立することになり，結局両姿態が混合して色々な形の節線が生ずる．この現象を縮退[1]と呼ぶ．二つの姿態が縮退を生ずる場合に，この２姿態の混合の割合は全く任意であるから，合成された姿態には様々の形が現れる．三つ以上の姿態が縮退する場合はさらに複雑な形が現れる．

（1） degeneration

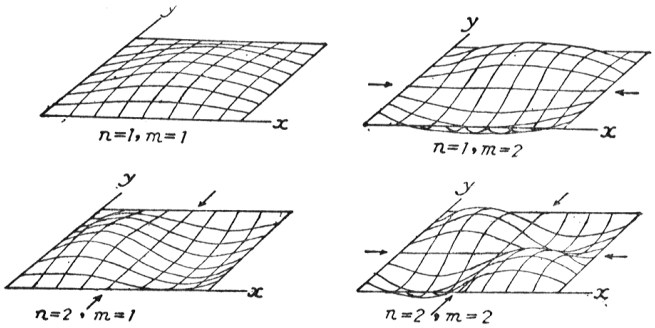
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=1$	+ $\omega_{11}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{1^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}}$	+ − $\omega_{12}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{1^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}}$	− + − $\omega_{13}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{1^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}}$	− + − + $\omega_{14}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}}$
$n=2$	+ − $\omega_{21}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}}$	+ − − + $\omega_{22}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}}$	+ − − + + − $\omega_{23}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}}$	+ − − + + − − + $\omega_{24}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}}$
$n=3$	− + − $\omega_{31}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{3^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}}$	+ − + − + − $\omega_{32}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{3^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}}$	+ − + − + − + − + $\omega_{33}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{3^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}}$	+ − + − + − + − + − + − $\omega_{34}=\sqrt{\frac{\pi^2 P}{\rho}}\sqrt{\frac{3^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}}$

第2・34図（a）　短形膜の規準振動姿態.

正方形膜の場合には，　$a=b$ であるため固有値は

$$k_{nm}{}^2=\frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2+m^2\right) \tag{29}$$

となり，　k_{nm} と　k_{mn} とは常に等しく，第　$n\,m$ 次姿態と第　$m\,n$次姿態とは常に縮退を生ずる．この他に　$\left(n^2+m^2\right)$　が一定で色々の　$n\ m$に分割できる場合は，それだけ縮退の重合度が多くなる．**第2・1表**にその一例を示す.



第2・34図（b）　正方形膜の振動姿態（ MORSE).

正方形膜で　$n=1$ ，　$m=2$　と　$n=2$ ，　$m=1$　とが縮退を生ずる場合の例を示すと

$$\omega_{12}{}^2=\omega_{21}{}^2=\frac{\pi^2 P}{\rho a^2}\left(1^2+2^2\right)=\frac{5\pi^2 P}{\rho a^2}, \tag{30}$$

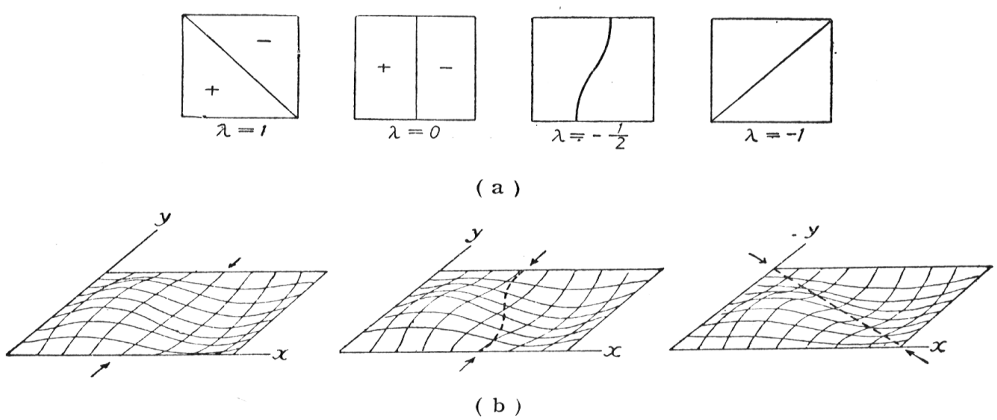
$$\zeta\infty\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}+\lambda\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$$

$$=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a}+\lambda\cos\frac{\pi y}{a}\right),$$

第2・1表
ω_{18}，ω_{81}，ω_{47}，ω_{74} の４姿態が縮退を生ずる例.

n	m	n^2+m^2
1	8	65
8	1	65
4	7	65
7	4	65

ここに　λ　は第12姿態と第21姿態の混合の割合を示す係数であり，　λ の値によって**第2・35図**のような色々の形の節線が表れる.

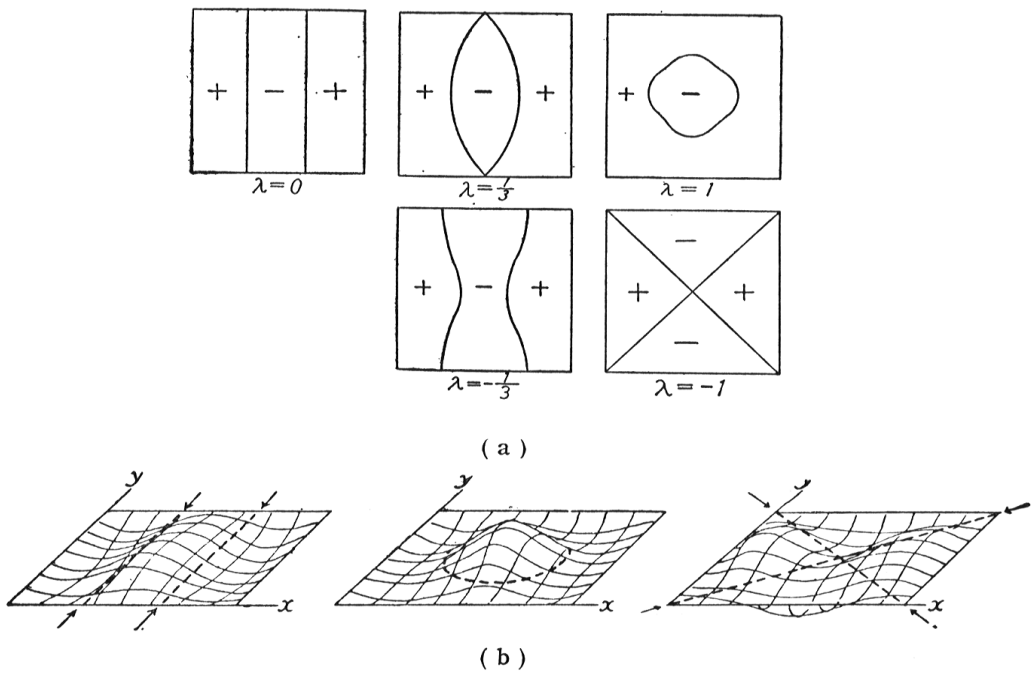


第2・35図　正方形膜 ： 第12姿態と第21姿態の縮退の例.

次に　ω_{31}　との　ω_{13}　の縮退姿態を求めてみると

(31)
$$\zeta \infty \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}+\lambda\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}$$
$$=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left\{3-4\sin^2\frac{\pi x}{a}+\lambda\left(3-4\sin^2\frac{\pi y}{a}\right)\right\}$$

となり，λ の値によって**第2・36図**のような節線が現われる.



第2・36図　　正方形膜 ： 第13姿態と第31姿態の縮退の例.

2・2・4　　円形膜の規準振動姿態

半径　a　なる円形膜の周囲が固定された場合の規準振動姿態を求めてみよう．中心 O を座標原点とし

極座標 r ， φ を用いて膜上の点の位置を表示することにすれば，膜の周囲は

$$r = a$$

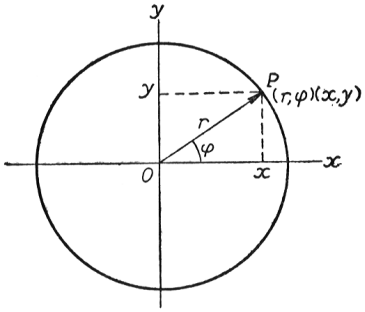
なる円で与えられるので境界条件を適用するに都合がよい．直角座標で表わされた膜の運動方程式は（9）に与えられており，これを極座標に変換するには

(32)　$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi$$

または

(33)　$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

なる関係を用いればよいのだが，ここでは直接極座標の運動方程式を求める方法を述べる．



第2･37図

まず単純な振動姿態から扱って行くこととし，最初は**運動が中心に関して対称形となる場合**を解いてみる．対称形ということはある時刻の変位の大きさが中心からどの方向を見ても等しいことを意味し，したがって変位の r の値が一定なる円周上では φ に無関係に一定値を取るような場合をいう．このような場合に，中心から r なる距離の所にある δr なる狭い幅の環状の帯の運動を考えると，この環帯の変位 ζ は r と t のみの函数で φ には無関係であり，この環帯に作用する応力の ζ 成分は

(34)　$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P2\pi r\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)\partial r = 2\pi P\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)\partial r\,.$$

環帯の質量は $\rho 2\pi r\,\delta r$ であるから運動の方程式は

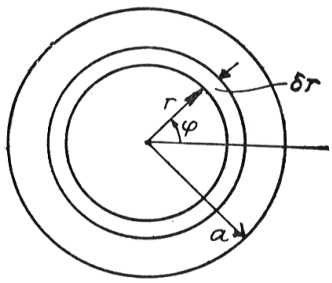
(35)　$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{P}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)$$

となる．もしも $\zeta \propto \cos(\omega t - \varphi)$ の場合には（32）は

(36)　$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} + k^2\zeta = 0\,,$$

ただし

$$k^2 = \omega^2\frac{\rho}{P}\,.$$



第2･38図

（36）は，第零階の **BESSEL 微分方程式**(1)と呼ばれ，振動および波動の問題にはしばしば現われる重要な方程式である．したがって，この解は古くから人々によって研究されており，正確な解が級数法によって求められている．中心を含む領域において有限なる級数解を，第零階の**ベッセル函数**と呼

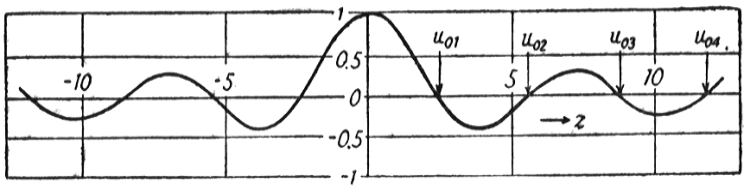
（1）　BESSEL'S diff. eq.of zero Order.F.W.BESSEL(1784-1846):Konigsberg の天文台長（1810－46）.

（2）　ベッセル函数表．この表があるのでベッセル函数は三角函数や対数または指数函数と同様に手軽に利用できる．中心を含む領域で有限とは $r=0$ において無限大とならぬことをいう．ベッセル函数については多くの文献があるが，下記のものは代表的のものである．
G.N.WATSON : "A Treatise on the Theory of BESSEL Functions"Cambridge Press,1922
JAHNKE-EMDE:"Funktionentafeln"B.G.Tubner,Berlin,1933.
林 桂一:"高等函数表"岩波書店.

び，$J_0(z)$　と記し，変数 z　に対する $J_0(z)$　の値は数表として作られている.[2]これを用いて（36）の解を書けば

（37）
$$\zeta = CJ_0(kr)\cdot\cos(\omega t-\varphi),$$
$$J_0(z)=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{2^2 4^2}\cdots$$

となる．これは **POISSON**[3](1829)が求めたものである．$J_0(z)$ の形を変数 z　横軸に取って描いて見ると，**第2･39図**のようになり，振幅および波長が次第に変化する波を表わし，z　の正方向，負方向は対称形をなしている.[4] この曲線と ~~2 軸~~との交点は



第2・39図　　$J_0(z)$ の形.

（38）
$$J_0(z)=0$$

を満足する点であり，このときの z　を $J_0(z)$ **の根**と呼び

（39）
$$z=u_{0m}$$

と書く．根 u_{0m}　は無数にあり，m の小さなものを示すと

（40）
$$u_{01}=2.4048,\quad u_{02}=5.5201,\quad u_{03}=8.6537,\quad u_{04}=11.7915,\quad u_{05}=14.9309,$$

または

（41）
$$\frac{u_{01}}{\pi}=0.765,\quad \frac{u_{02}}{\pi}=1.7571,\quad \frac{u_{03}}{\pi}=2.7546,\quad \frac{u_{04}}{\pi}=3.7537$$

である．

（37）は境界条件を満足する必要があり，そのためには

（42）
$$r=a \quad で \quad \zeta=0,$$

すなわち

（43）
$$J_0(ka)=0$$

でなければならぬ．これより

（44）
$$ka=u_{0m}$$

でなければならず，k の取り得る**固有値**は

（45）
$$k_{0m}=\frac{u_{0m}}{a}\ \ (\mathrm{rad/m})\quad または\quad \omega_{0m}=\sqrt{\frac{P}{\rho}}\,\frac{u_{0m}}{a}\ \ (\mathrm{rad/m}).$$

したがって固有振動数は

（3）　S.D.POISSON(1781-1840):膜および板の振動，空気中の音波の一般理論などで音響学に貢献した。

（4）　z が大きくなるに従い振幅が減少し周期が長くなる.

(46)　$$\nu_{0m}=\frac{u_{0m}}{2\pi a}\sqrt{\frac{P}{\rho}}\quad \text{(Hz)},$$

これらの固有値に対する規準振動型姿態は

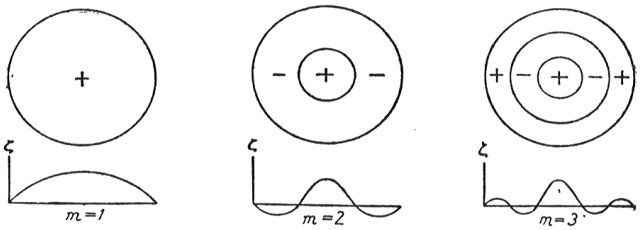
(47)　$$\zeta_{0m}=C_{0m}\mathrm{J}_0\left(\frac{u_{0m}}{a}r\right)\cdot\cos\left(\omega_{0m}t-\varphi_{0m}\right)$$

であり、これは $(m-1)$ 本の円形節線（節円）[5]を生ずる（**第2・40図**）．

(39)の**完全解**は

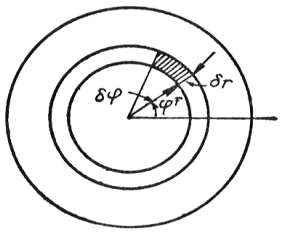
(48)　$$\zeta=\left[A\mathrm{J}_0(kr)+B\mathrm{N}_0(kr)\right]\cos(\omega t-\varphi)$$

と書ける．$\mathrm{N}_0(kr)$は**第二種ベッセル函数**と呼ばれ $r=0$ で無限大に発散する．周囲を固定した膜の振動は中心で異常に大きな変位をすることは考えられぬので $B=0$ とおき，(37)の形を得る．中心を除いた領域で境界条件を満足するためには（48）を用いねばならぬ．



第2・40図　　図形膜の対称形規準振動姿態の例.

次に中心に対して対称とは限らぬ一般的の振動姿態を求めてみる．この場合には ζ は t と r の他に φ の函数であるから，**第2・41図**のように，一点 (r,φ) の近傍の δr なる幅の環帯の $\delta\varphi$ なる中心角で挟まれた微小部分の運動の方程式を求める．この部分の直線辺の長さは δr ，曲線辺の長さは $r\delta\varphi$ であるから曲った辺に作用する応力の垂直成分は



第2・41図

(49)　$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P\cdot r\delta\varphi\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)\delta r,$$

直線の辺に作用する力は

(50)　$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(P\delta r\cdot\frac{\partial\zeta}{r\partial\varphi}\right)\delta\varphi$$

となり運動の方程式は

(51)　$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=P\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right)\right\}.$$

(51) にて $\zeta\propto\cos(\omega t-\varphi)$ とおけば

(52)　$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}+k^2\zeta=0,$$
$$k^2=\omega^2\frac{\rho}{P}$$

となる．(51) または (52) は極座標で表わした二次元の波動方程式であり，円形膜の振動の可能な

(5)　Nordal circle

姿態はすべてこの式の解として求められる．

（48）を解くには（9）の場合と同様に

（53）　$\zeta = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$

と仮定し，変数分離法を用いて解くことができる．しかしこの場合少し物理的考察を加えて見ると，膜上の一点 (r_1,φ_1) における変位を ζ_1 とすると，r_1を一定に保って φ のみを φ_1 から順次増した場合に，点の位置は膜上を $+\varphi$ の方向に r_1なる半径の円周に沿って移動し，それぞれの点に対する変位 $\zeta(r_1,\varphi_1)$の値が（52）の解として求まる筈である．そして丁度 $\varphi_2=\varphi_1+2\pi$ となったときにもとの点 (r_1,φ_1) に戻ってくる．よって $(r_1,\ \varphi_1+2\pi)$ なる点の ζ の値は (r_1,φ_1) の ζ と同一の値を取らねばならぬ．さもなければ膜が２枚に分裂していなければならぬ．同様に，nを整数とするとき，$\zeta(r_1,\ \varphi_1+2\pi n)$は同一の値とならねばならず，したがって ζ は φ に関して 2πを周期とする周期函数でなければならない．しかるに一方 FOURIERの定理により，2πを周期とする周期函数は三角函数の級数で展開できるから，（53）の $\Phi(\varphi)$は三角函数級数と考えることができる．

この考えにもとづいて（53）の代りに解の形を

（54）
$$\zeta = R_0(r)+R_1(r)\cos\varphi+S_1(r)\sin\varphi+R_2(r)\cos2\varphi+S_2(r)\sin2\varphi+\cdots$$
$$+R_n(r)\cos n\varphi+S_n(r)\sin n\varphi+\cdots$$

と仮定し，$R_n(r)$と $S_n(r)$ を r の函数と考え（52）を満足するようにこれを定めても同様の結果を得る．その結果は

（55）
$$\zeta = \left\{R_n(r)\cos n\varphi+S_n(r)\sin n\varphi\right\}\cos(\omega t-\varphi),$$

ただし R_n，S_n は

（56）
$$\frac{d^2R^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n=0,$$
$$\frac{d^2S^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dS_n}{dr}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)S_n=0$$

の解であり，（56）は R_n または S_n について全く同形の微分方程式であり，これを**第 n 階の BESSEL 微分方程式**と呼ぶ．その解は

（57）
$$R_n=A_n\mathrm{J}_n(kr),\quad S_n=B_n\mathrm{J}_n(kr)$$

と書くことかできる．ここに

（58）
$$\mathrm{J}_n(z)=\frac{z^2}{2^n n!}\left\{1-\frac{z^2}{2(2n+2)}+\frac{z^4}{2\cdot4(2n+2)\cdot(2n+4)}+\cdots\right\}$$

は**第 n 階のベッセル函数**，A_n B_n は任意定数である．よって（52）の一般解は

（59）
$$\zeta=C_n\mathrm{J}_n(kr)\cdot\cos(n\varphi-\alpha)\cdot\cos(\omega t-\varphi)$$
$$=(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\mathrm{J}_n(kr)\cdot\cos(\omega t-\varphi)$$

とかける．

周辺固定膜の~~場割こ~~は（59）は境界条件として

（60）　$r = a$　で　$\zeta = 0$

を満足する必要があり，そのためには

（61）　$\mathrm{J}_n(ka) = 0$

なることが必要である．$\mathrm{J}_0(z) = 0$ の根を u_{nm} とすると，（61）より

（62）　$ka = u_{nm}$

または固有値として

（63）　$$k_{nm} = \frac{u_{nm}}{a}, \qquad \omega_{nm} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}\,\frac{u_{nm}}{a}$$

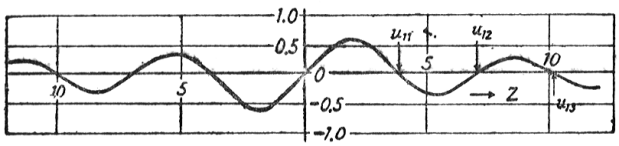
を得る．なお $\mathrm{J}_n(z)$ の形は**第 2・42 図**および**第 2・43 図**に示してある．この固有値を用い，かつ座標軸を適当に選んで $\alpha = 0$ となるようにすると，**円型膜の規準振動姿態**の一つは

（64）　$$\zeta_{nm} = C_{nm}\,\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)\cdot\cos n\varphi\cdot\cos\left(\omega_{nm}t - \varphi\right)$$

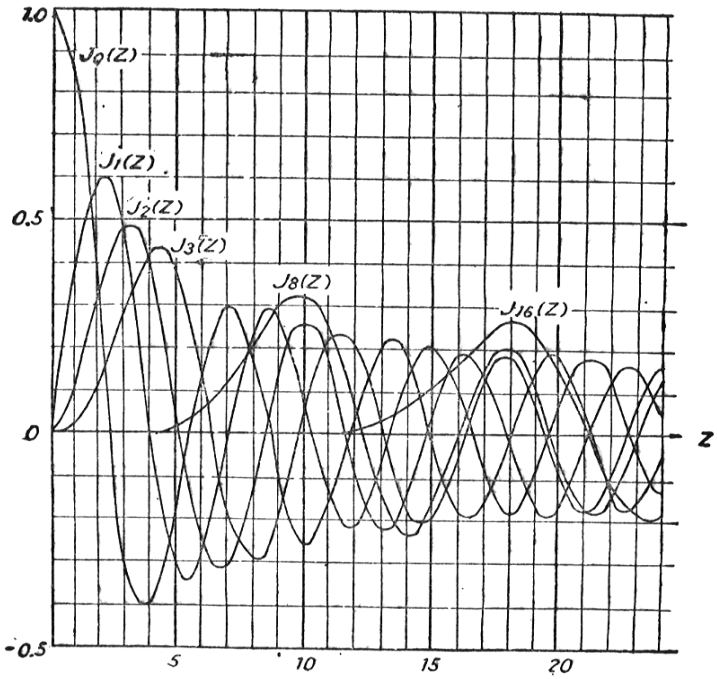
となる．この振動姿態の節線は

（65）　$$\cos n\varphi = 0, \qquad n\varphi = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

となるような角



第2・42図　　$\mathrm{J}_1(z)$ の形．



第2・43図　　ベッセル函数 $\mathrm{J}_n(z)$．

(66)
$$\varphi=\frac{1}{n}\cdot\frac{(2p+1)\pi}{2},\quad \begin{matrix}(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)\\(p=0,\ 1,\ 2,\cdots)\end{matrix}$$

を表わす直線（原点を通る）と

(67)
$$\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)=0,$$

$$\frac{u_{nm}}{a}r=u_{n1},\quad u_{n2},\quad u_{nm},\cdots$$

となるような半径

(68)
$$r_{nq}=\frac{u_{nq}}{u_{nm}}a,\qquad (q=1,\ 2,\ 3,\cdots m)$$

を持つ円である．この二三の例を**第2・44図**に示しておく。

なおこれらの姿態が重畳したものも膜の振動し得る姿態であるから周辺固定円形膜の一般解は

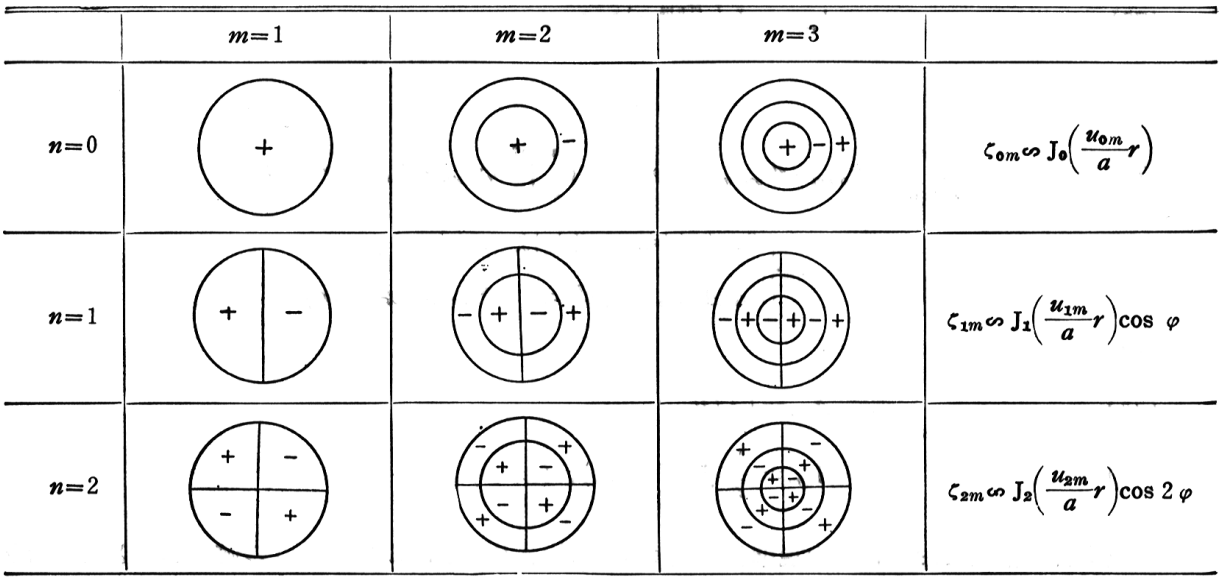
第2・2表　$\mathrm{J}_n(x)=0$ の根 u_{nm}.

n/m	1	2	3	4	5
0	2.405	5.520	8.654	11.79	14.93
1	3.832	7.016	10.17	13.32	16.47
2	5.136	8.417	11.62	14.80	17.96
3	6.380	9.761	13.02	16.22	19.41
4	7.588	11.07	14.37	17.61	20.83

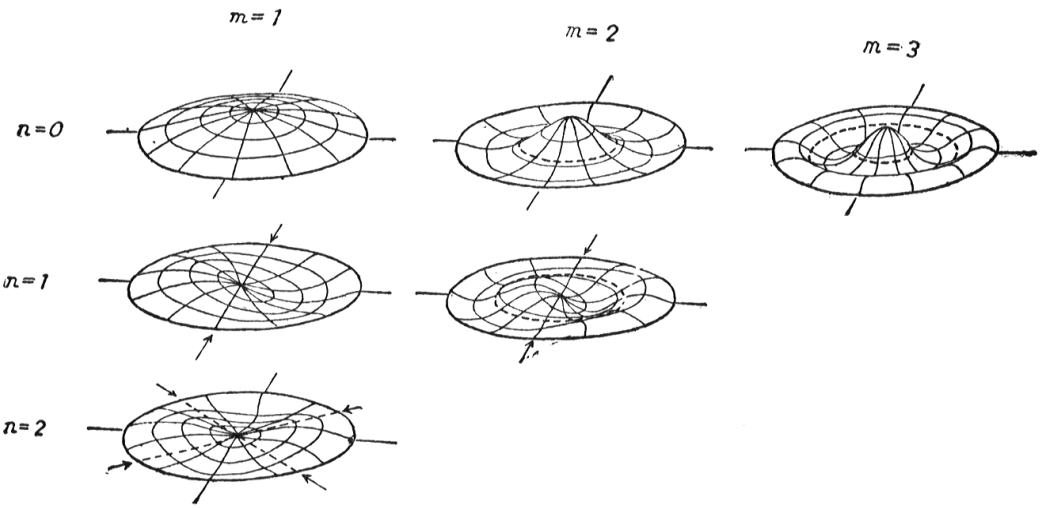
第2・3表　$\dfrac{d\mathrm{J}_n(x)}{dx}=0$ の根 u'_{nm}.

n/m	1	2	3	4	5
0	3.832	7.016	10.17	13.32	16.47
1	1.84	5.331	8.535	11.71	14.86
2	(3.06)	6.70	9.969	13.17	16.35
3	(4.20)	8.01	11.34	14.59	17.79
4	(5.2)	(9.2)	(12.68)	(15.97)	19.20

(　) 印は精度が期待できないことを示す.



第2・44図（a）　円形膜の規準振動姿態.



第2・44図（b）　円形膜の規準振動姿態.

(69)
$$\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}\,\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)\cdot\cos n\varphi\cdot\cos\left(\omega_{nm}t-\varphi_{nm}\right)$$

となる．これは $n=0$ なる対称形姿態を含むことは勿論である．なおベッセル函数の根の値は**第2・2表**および**第2・3表**に示してある．

円形膜の**波動函数**は

(70)
$$\psi_{nm}(r,\varphi)=\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)\cdot\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}n\varphi\,,\qquad\begin{matrix}(0<r<a)\\ (0<\varphi<2\pi)\end{matrix}$$

であって，$\sin n\varphi$を含むものは奇函数，$\cos n\varphi$を含むものは偶函数となっている．よってそれぞれを

(71)
$$\psi_{0nm}=\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)\sin n\varphi\,,$$

(72)
$$\psi_{\cancel{0}nm}=\mathrm{J}_n\left(\frac{u_{nm}}{a}r\right)\cos n\varphi\,,$$

と記すことにすると，

(73)
$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\psi_{0nm}\cdot\psi_{0n'm'}\,r\,d\varphi\,dr=\int_0^a\int_0^{2\pi}\psi_{enm}\cdot\psi_{en'm'}\,r\,d\varphi\,dr$$
$$=\begin{cases}0, & (n'\neq n\quad\text{または}\quad m'\neq m)\\ \pi a^2\Lambda_{nm}, & (n'=n\quad\text{でかつ}\quad m'=m)\end{cases}$$

ただし

(74)
$$\Lambda_{om}=\mathrm{J}_1^{\,2}\left(u_{om}\right),$$

(75)
$$\Lambda_{nm}=\frac{1}{2}\mathrm{J}_{n+1}^{\,2}\left(u_{nm}\right)\quad(n>0)$$

なる直交条件を備えており，その規準化因数は $\pi a^2\Lambda_{nm}$ である．ここに Λ_{nm} の値を示すと次の通りである．

$$\mathrm{J}_1(u_{01})=+0.5191,\quad \mathrm{J}_1(u_{02})=-0.3403,\quad \mathrm{J}_1(u_{03})=+0.2715,\quad \mathrm{J}_1(u_{04})=-0.2325,$$
$$\mathrm{J}_0(u_{11})=-0.4028,\quad \mathrm{J}_0(u_{12})=+0.3001,\quad \mathrm{J}_0(u_{13})=-0.2497,\quad \mathrm{J}_0(u_{14})=+0.2184,$$
$$\mathrm{J}_1(u_{21})=-0.3397,\quad \mathrm{J}_1(u_{22})=+0.2714,\quad \mathrm{J}_1(u_{23})=-0.2324,\quad \mathrm{J}_1(u_{24})=+0.2026.$$

したがって、任意の初変位分布 $\phi_0(r,\varphi)$ および初速度分布 $\psi_0(r,\varphi)$とが与えられたときに，それ以後の膜の自由振動の変位は

(76)
$$\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{enm}\left(A_{enm}\cos\omega_{nm}t+B_{enm}\sin\omega_{nm}t\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{0nm}\left(A_{0nm}\cos\omega_{nm}t+B_{0nm}\sin\omega_{nm}t\right)\right],$$

ここに

$$A_{\substack{e\\o}nm}=\frac{1}{\pi a^2\Lambda_{nm}}\int_0^a\int_0^{2\pi}\phi_0\cdot\psi_{\substack{e\\o}nm}\,r\,d\varphi\,dr,$$
$$B_{\substack{e\\o}nm}=\frac{1}{\omega_{nm}\pi a^2\Lambda_{nm}}\int_0^a\int_0^{2\pi}\psi_0\cdot\psi_{\substack{e\\o}nm}\,r\,d\varphi\,dr$$

で与えられる．

2・2・5　膜 の 強 制 振 動

膜に外力が作用する場合の膜の運動は絃の強制振動の場合と同様の方法をもって取扱うことができるが，外力の作用する位置が平面的の拡がりを持っているのでそれだけ取扱法が繁雑となる．外力を Z と書くと，直角座標における運動の方程式は

(77)
$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=P\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)+Z(x,y,t)$$

と書けるが，外力 Z の空間分布の函数形を二次元の **FOURIER** の級数よりなる矩形膜の波動函数で展開し

(78)
$$Z(x,y,t)=\sum_s\sum_q f_{sq}(t)\cdot\sin\frac{s\pi x}{a}\cdot\sin\frac{q\pi y}{b}$$

とし，**2・1・5** の（138）の解法と同様の方法で一般解を求めることができる．また円形膜の場合には運動方程式を

(79)
$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=P\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right)\right\}+Z(x,\varphi,t)$$

と表わし，外力を円形膜の波動函数で展開し

(80)
$$Z(x,\varphi,t)=\sum_{s=0}\sum_{q=1}f_{sq}(t)\cdot\mathrm{J}_s\left(\frac{u_{sq}}{a}r\right)\cdot\cos s\varphi$$

として一般解を求めることができる．円形膜の場合に外力の形を展開した級数を **FOURIER-BESSEL 級数**という．

簡単な場合の例として Z が膜上に一様に $\cos(pt-\alpha)$なる形で作用する場合を扱ってみる．この場

合には Z は φ にも　r にも関係しない形を取り，その結果運動は対称形となる筈であって，運動方程式は

(81)
$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=P\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+Z_0\cos(pt-\alpha).$$

(81) の特別解の一つは　$\zeta\infty\cos(pt-\alpha)$　であってその場合の　ζ　は

(82)
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+k^2\zeta=-\frac{Z_0}{P},$$
$$k^2=\frac{\rho p^2}{P}$$

の解であればよく

(83)
$$\zeta=-\frac{Z_0}{k^2P}+C\mathrm{J}_0(kr).$$

$r=a$　にて　$\zeta=0$　となるためには

(84)
$$C=\frac{1}{\mathrm{J}_0(ka)}\frac{Z_0}{k^2P}$$

なる必要があり，膜の定常状態における変位は

(85)
$$\zeta=\left\{\frac{\mathrm{J}_0(kr)}{\mathrm{J}_0(ka)}-1\right\}\frac{Z_0}{\rho p^2}.$$

なお過渡項として，これに（69）が加わり，初期条件 ($t=0$) から　C_{nm}　の値が求められる．

（85）は

(86)
$$\mathrm{J}_0(ka)=0,\quad ka=u_{0m}\quad \text{または}\quad p=\frac{u_{0m}}{\rho}\sqrt{\frac{p}{\rho}}=\omega_{0m}$$

となるときに共振し，非常に大きな振幅となる．

外力が特に接続正弦波形であって，かつその空間分布が与えられている場合には，二次元の空間座標を　$q_1\,q_2$　とすれば，外力は

(87)
$$Z(q_1,\ q_2,\ t)=F(q_1,\ q_2)\cdot\cos pt$$

と表わせるから，これを (q_1 , q_2) 座標系の波動函数で展開して

(88)
$$\frac{Z(q_1,q_2,t)}{\rho}=\left[\sum_{n,m}g_{nm}\psi_{nm}(q_1,q_2)\right]\cos pt,$$

(89)
$$g_{nm}=\Gamma^{-1}{}_{nm}\int^{q1}\int^{q2}\frac{F(q_1,q_2)}{\rho}\cdot\psi_{nm}(q_1,q_2)dq_1\cdot dq_2$$

とし，また変位　ζ を波動函数で展開して

(90)
$$\zeta(q_1,\ q_2,\ t)=\sum_{n,m}\eta_{nm}(t)\cdot\psi_{nm}(q_1,\ q_2)$$

とし，　ζ が

(91)
$$c^2\nabla^2\zeta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{Z(q_1,q_2,t)}{\rho},$$

$$c^2 = \frac{P}{\rho}$$

を満足するように $\eta_{nm}(t)$ を定めればよい．ここに Γ_{nm} は規準化因数であり，∇^2 は **LAPLACE** の演算子で直角座標または極座標の場合には

(92)
$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] \quad \text{または} \quad \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]$$

の形を取る．この結果は

(93)
$$\frac{d^2\eta_{nm}}{dt^2} + \omega^2{}_{nm}\,\eta_{nm} = g_{nm}\cos pt$$

となり

(94)
$$\eta_{nm} = \frac{g_{nm}}{\omega^2{}_{nm} - p^2}\cos pt + A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t\,.$$

よって変位は

(95)
$$\zeta = \frac{1}{\rho}\sum_{n,m}\Gamma^{-1}{}_{nm}\left[\int^{q_1}\int^{q_2} F(q_1, q_2)\cdot\psi_{nm}(q_1, q_2)\,dq_1, dq_2\right]\frac{\psi_{nm}(q_1, q_2)}{\omega^2{}_{nm} - p^2}\cos pt$$
$$+\sum_{n,m}\left(A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t\right)$$

で与えられる．この結果は減衰項を省略した形で示されているが，**2・1・10** の結果と比較すると二次元の強制振動姿態の様相が想像されるであろう．

2.2.6　二次元空間内の自由進行平面波

膜の運動方程式（4）を

(96)
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right),$$
$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (\mathrm{m/s})$$

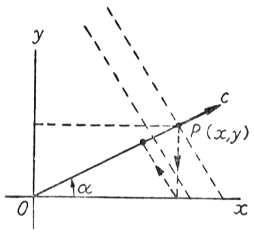
と書き直すと，

(97)
$$\zeta = F(x - ct) \quad \text{および} \quad \zeta = F(y - ct)$$

は（96）を満足し，それぞれ y 軸に平行な波頭面が $+x$ 方向へおよび x 軸に平行な波頭面が $+y$ 方向に c なる速度で伝播する波動を表わしている．この形をさらに一般化し x 軸と α なる角をなす方向に c なる速度で進行する平面波を表わす解を求めると

(98)
$$\zeta = F(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct)$$

となる(**第2・45図**)．また，x 軸上で膜が固定されている場合には，α なる入射角で x 軸（$y=0$）に入射した波動は反射されるはずであるが，このような境界条件を満足する解は



$OP = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.
第2・45図

(99)
$$\zeta = F\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct\right) - F\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha - ct\right)$$

である．この解は　$y=0$　とおくと　$\zeta=0$ となり，その第一項は $+\alpha$ 方向に進む入射平面波を，第二項は，$-\alpha$方向に進行する反射平面波を表わしており，(99) は両者が重畳した波動姿態を表わしている．この形をさらに拡張して，あらゆる方向に進む平面波の重畳された波動姿態を表現する形を求めると

(100)
$$\zeta = \int_0^{2\pi} F_\alpha\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct\right)d\alpha$$

となる．ここに F_α は　αなる方向へ進行する成分平面波の有する函数形であり，それぞれの α について　F_α の函数形が与えられれば，それらが重畳された波動姿態の変位は（100）から決定できる．

逆にある姿態が与えられたときにそれを平面波成分で構成するような函数形　F_α　が求められれば都合がよい．単弦振動をする場合には，α 方向に進行する成分平面波を

(101)
$$\zeta_\alpha = A_\alpha \cos\left\{\frac{\omega}{c}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct\right)\right\}$$

と表わすことができるが，またこの形を重畳することによって矩形膜の定在波振動を構成することができ，

(102)
$$\begin{aligned}\zeta = \frac{A}{4}\Bigg\{&\cos\left[\frac{\omega}{c}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct\right) - \varphi_1\right]\\ &+\cos\left[\frac{\omega}{c}\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha - ct\right) - \varphi_2\right]\\ &+\cos\left[\frac{\omega}{c}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha + ct\right) - \varphi_3\right]\\ &+\cos\left[\frac{\omega}{c}\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha + ct\right) - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_1\right]\Bigg\}\\ = A\cos&\left(\frac{\omega}{c}x\cos\alpha - \Phi_x\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c}y\sin\alpha - \Phi_y\right)\cdot\cos\left(\omega t - \Phi\right),\end{aligned}$$

ただし

$$\Phi_x = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2},\quad \Phi_y = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},\quad \Phi = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}$$

のように表わされる．したがってこのような二次元空間の定在波姿態は４組の平面進行波を重畳することによって構成されることがわかる．

また BESSEL 函数を用いて同様に二次元空間内の平面波成分を表現することができる．それには，(101）の振幅函数　A_α　が　αの三角函数で表現されるものと仮定し，(101）と（100）より

(103)
$$\zeta = \int_0^{2\pi} \cos\left(m\alpha\right)\cdot e^{i\frac{\omega}{c}\left[x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct\right]}d\alpha$$

と表わし，(32) を用いて極座標 (r,φ) を導入し

(104)
$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = r\cos(\alpha-\varphi)$$

とし，さらに

(105)
$$\alpha-\varphi=\beta$$

とおくと，(103) は

(106)
$$\zeta = e^{-i\omega t}\int_0^{2\pi}\left[\cos m\varphi\cdot\cos(m\beta)-\sin(m\varphi)\cdot\sin(m\beta)\right]e^{i\frac{\omega}{c}r\cos\beta}d\beta$$
$$= e^{-i\omega t}\cdot\cos(m\varphi)\cdot 2\pi i^m \mathrm{J}_m\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

となる．ただし (106) の $\sin(m\beta)$ を含む項は積分すると消滅し，$\cos(m\beta)$ の項の積分には

(107)
$$\mathrm{J}_m(z)\equiv\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos\theta}\cos(m\theta)d\theta$$

を用いている．(106) より**円形膜の波動函数を平面波成分より合成する形式**が導かれ，

(108)
$$\cos(m\varphi)\cdot\mathrm{J}_m\left(\frac{\omega}{c}r\right)\cdot e^{-i\omega t}=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi}\cos(m\alpha)\cdot e^{i\frac{\omega}{c}[x\cos\alpha+y\sin\alpha-ct]}d\alpha$$

となる．同様に

(109)
$$\sin(m\varphi)\cdot\mathrm{J}_m\left(\frac{\omega}{c}r\right)\cdot e^{-i\omega t}=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi}\sin(m\alpha)\cdot e^{i\frac{\omega}{c}[x\cos\alpha+y\sin\alpha-ct]}d\alpha\,.$$

また逆に x 方向に**進行する平面進行波を円形膜の波動函数で表示すること**ができる．その方法は

(110)
$$e^{\frac{i\omega}{c}(r\cos\varphi-ct)}=e^{-i\omega t}\sum_{m=0}^{\infty}C_n(r)\cdot\cos(m\varphi),$$
$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{1\omega}{c}r\cos\varphi}d\varphi=\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{c}r\right),$$
$$C_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{1\omega}{c}r\cos\varphi}\cdot\cos(m\varphi)d\varphi$$
$$=2i^m\mathrm{J}_m\left(\frac{\omega}{c}r\right),\qquad(m>0)$$

と表わせるから，$r\cos\varphi=x$ とおくと

(111)
$$e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)}=\left[\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{c}r\right)+\sum_{m=1}^{\infty}2i^m\cos(m\varphi)\cdot\mathrm{J}_m\left(\frac{\omega}{c}r\right)\right]e^{-i\omega t}$$

となる．これの実数部を取ると

(112)
$$\cos\left[\frac{\omega}{c}(x-ct)\right]=\left\{\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{c}r\right)-2\cos2\varphi\cdot\mathrm{J}_2\left(\frac{\omega}{c}r\right)+\cdots\right\}\cos\omega t$$
$$-\left\{2\cos\varphi\cdot\mathrm{J}_1\left(\frac{\omega}{c}r\right)-2\cos3\varphi\cdot\mathrm{J}_3\left(\frac{\omega}{c}r\right)+\cdots\right\}\sin\omega t$$

となる．なお次に BESSEL 函数の基本的な公式を掲げておく．

基本式：

(113)
$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z\frac{d}{dz}\mathrm{J}_n(z)\right]+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)\mathrm{J}_n(z)=0,$$

級数展開式：

(114)
$$\mathrm{J}_n(z)=\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2!(n+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2}-\cdots,$$

漸近展開式の極限：

(115)
$$\mathrm{J}_{n(z)}\longrightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

積分表示式：

(116)
$$\mathrm{J}_n(z)=\frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta,$$

循環式：

(117)
$$\mathrm{J}_{n-1}(z)+\mathrm{J}_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}\mathrm{J}_n(z),$$

微分公式：

(118)
$$\frac{d}{dz}\left[\mathrm{J}_n(z)\right]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_{n-1}(z)+\mathrm{J}_{n+1}(z)\right],$$

(119)
$$\frac{d}{dz}z^n\left[\mathrm{J}_n(z)\right]=z^n\mathrm{J}_{n-1}(z),$$

(120)
$$\frac{d}{dz}z^{-n}\mathrm{J}_n(z)=-z^{-n}\mathrm{J}_{n+1}(z),$$

積分公式：

(121)
$$\int\mathrm{J}_1(z)dz=-\mathrm{J}_0(z),$$

(122)
$$\int z\mathrm{J}_0(z)dz=z\mathrm{J}_1(z),$$

(123)
$$\int\mathrm{J}_0^2(z)zdz=\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{J}_0^2(z)+\mathrm{J}_1^2(z)\right],$$

(124)
$$\int\mathrm{J}_n^2(z)zdz=\frac{z^2}{2}\left[\mathrm{J}_n^2(z)-\mathrm{J}_{n-1}(z)\cdot\mathrm{J}_{n+1}(z)\right].$$

2・3　棒の振動

棒というのは絃や膜と異なり，長さおよび太さのある三次元の拡がりを待った剛体である．その形は外力によって弾性の限界内でわずかに変形するが，外力がなくなればもとの平衡の布置へ戻り一定の形状を保つ．したがってこの平衡の布置を中心として微小振動をするような変形が生じ得るが，これを取り扱うには弾性理論から出発せねばならない．この節では弾性体の棒を例にとり弾性体内の波動

振動および梁の振動を説明する．なお音響学にとって棒の振動は音叉，木琴などの形で発音体に利用される以外には余り重要なものではないが，その理論的取扱方法は種々の問題を解く手引となる．

2・3・1　弾性理論，ヒズミ，応力および弾性定数

弾性理論とは弾性体と見なされる固体の変形を研究する理論であって，その変数は変位または**変形**(1)である．平衡状態にあった固体がなんらかの原因で変形を生ずると，固体の内部には変形をもとの平衡の布置へ戻そうとする力が発生し，この力と変形の原因となる外力とが平衡する所まで変形する．この内部に発生する力を**応力**(2)と呼び変形と応力との関係を記述したものが弾性理論である．最初に変形から説明しよう．

（1）　変形またはヒズミ　変形の内で最も考えやすい形のものは**伸び**(3)または**伸びによるヒズミ**であろう．変形前に物体内に引いた１本の直線の長さを PQ と記す．この物体が変形したために，この直線が伸びて $P'Q'$ の長さになったとすると，伸びは

$$\delta l = P'Q' - PQ \qquad \text{(m)}$$

で示される．この伸びのもとの長さに対する比

（1）
$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} \qquad \text{(数値)}$$

を伸びによるヒズミ(4)と呼びその単位は数値であり，$\varepsilon \ll 1$ である場合が多い．伸びヒズミは，ある一つの変形に際して，物体内の方向によってまた場所によって異なる場合が普通である．よってどの点のどの方向の伸びであるかを指定しておかねばならぬ．なお伸びが負の値をとるときは**縮み**(5)である．

伸びが物体内の至る所で一様である場合を**一様な伸び**(6)といい，場所や方向によらずに一定のヒズミを生ずる．物体内に任意の直交軸 $q_1 q_2 q_3$ を取り，それぞれの方向の伸びヒズミを $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ とすると一様なヒズミの場合には，

（2）
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$$

と書ける．

３軸方向の伸びにより**体積の膨張する割合**を計算することができる．変形する前に各軸上の長さが１であった立方体が変形した後の体積は

（3）
$$V' = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

であるから体積の膨張した割合は

（4）
$$\Delta = \frac{V'-1}{1} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad \text{(数値)}$$

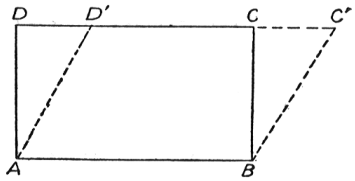
（1）　deformation　　（2）　stress
（3）　elongatian,extention、extentionaI strain
（4）　伸びによるヒズミのことを単に伸びということもある．
（5）　contraction　　（6）　uniform extention

となる．（4）を**膨張**[7]と呼ぶ．なお ε が1になることより ε の二次の項は省いてある．もしも一様な伸びであれば

（5）　$\Delta = 3\varepsilon$　または　$\varepsilon = \dfrac{1}{3}\Delta$

である．

次に**剪断ヒズミ**[8]について説明しよう．**第2・46図**のように物体内で変形前に矩形 $ABCD$ であった図形が，物体の変形にしたがって滑り変形をして $ABC'D'$ となったとする．この変形で長さ DC は $D'C'$ と等しく不変であり，かつ DC と $D'C'$ とは同一直線上にあるとすれば，変形を表示するものは DD' または CC' の変位であろう．この変形は線分 AB と DC との相対的変位とみなすことができるので，2線分の距離 AD に対する変位 DD' の大きさをもって変位の割合を表示するのが妥当である．これを



第2・46図

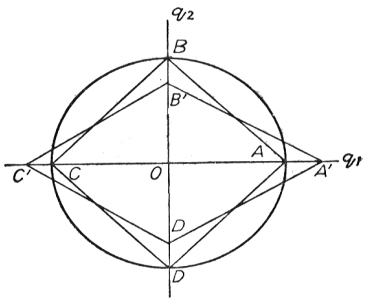
（6）　$\eta = \dfrac{DD'}{AD}$　（数値）

と書き，η を剪断ヒズミと呼ぶ．剪断ヒズミの性質を知るために，**第2・47図**のように物体内の直交軸 $q_1 q_2$ を対角線とする正方形 $ABCD$ を考える．この物体が変形し，x_1 方向に伸び x_2 方向には縮んでひずみの大きさが

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 ,$$

となったと仮定すると，正方形は変形して $A'B'C'D'$ となる．このひずんだ図形の1辺の長さは

（7）
$$A'B' = \sqrt{\overline{OB'}^2 + \overline{OA'}^2}$$
$$= \sqrt{\overline{OB'}^2 (1-\varepsilon)^2 + \overline{OA'}^2 (1+\varepsilon)^2}$$
$$= \overline{AO}\sqrt{2} = AB$$



第2・47図

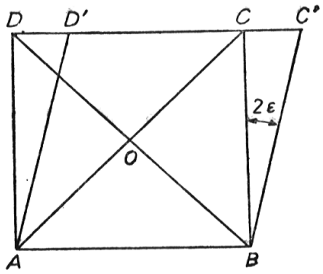
となり，変形前の長さに等しい．よって $A'B'C'D'$ は $ABCD$ と辺の長さの等しい菱形である．また $\angle A'B'O$ は

（8）
$$\tan \angle A'B'O = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$$

であるから

（9）
$$\angle A'B'O = \frac{\pi}{4} + \varepsilon \qquad (\mathrm{rad})$$

となる．[9] したがって図の $A'B'$ を変形前の位置 AB に重ねてやれば**第**



第2・48図

（7）dilatation　　（8）shearing strain

2・48 図のような形となり，第 2・46 図と比較して

(10)
$$\frac{DD'}{AD} = \tan\angle DAD' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \angle D'AB\right)$$
$$= \tan\left[\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)\right]$$
$$= \tan 2\varepsilon \approx 2\varepsilon .$$

よって剪断ヒズミは対角線方向の伸びヒズミで表わされ

(11)
$$\eta = 2\varepsilon$$

となる．

一般に変形前に物体内で平行していた２直線が変形を受けた後もやはり平行に保たれている場合をヒズミの均等な変形または**均等ヒズミ**(10)と呼ぶ．このような場合には変形前に平行四辺形であった図形は変形後も平行四辺形であるが，平行でない図形の相対的の位置は規定できない．均等ヒズミが生じた場合に物体内の一点 (q_1, q_2, q_3) における変位　$r(q_1, q_2, q_3)$ の各軸方向の成分　ξ_1, ξ_2, ξ_3 は

(12)
$$\xi_1 = \varepsilon_{11} q_1 + \varepsilon_{12} q_2 + \varepsilon_{13} q_3 ,$$
$$\xi_2 = \varepsilon_{21} q_1 + \varepsilon_{22} q_2 + \varepsilon_{23} q_3 ,$$
$$\xi_3 = \varepsilon_{31} q_1 + \varepsilon_{32} q_2 + \varepsilon_{33} q_3 ,$$

または

(12)'
$$\xi_i = \sum \varepsilon_{ij} q_j$$

と表わされる．ε_{ij} は　q_j 方向の座標の変化によって　q_j 方向に生ずる変形の大きさを示す係数である．したがって ε_{11}　ε_{22}　ε_{33} はそれぞれ　q_1, q_2, q_3 方向の伸びを表わす．これら９個のヒズミを一括して**ヒズミテンソル**(11)という．各　ε_{ij}　はテンソル成分である．

(12) のような形で表わされる変形は座標の３軸の方向を適当に選ぶと，その３軸方向の伸びだけで変形を表示することができ，したがって変形前に直交していた３軸は変形後も直交するように座標系を定めることができる．これは変形前に球であった図形が変形後回転楕円体となることを意味し，この楕円体の主軸を座標軸に選んでおけば変形に際しての変位はその軸方向の伸びばかりで表示されることを意味している．このような３軸を**ヒズミの主軸**(12)と呼ぶ．

（２）応　力　　物体にヒズミが生じると，物体内にはもとのヒズミのない状態に戻ろうとする力が生ずる．この力は，物体内に仮想面 S を想像すると，　S の両側の物質が交互に　S を介して力を及ぼし合っていると考えられる．この面 S に作用する力を応力と呼び，面　S に対して押し，引き，垂直，斜，または平行な力がある．応力の大きさは，それが作用する面の単位面積あたりの力の強さで

---

(9)　これより菱形の頂角は　$\frac{\pi}{2} \pm 2\varepsilon$　で与えられることになる．

(10)　homogenious strain　　(11)　strain tensor　　(12)　principal axIs of atrain

あらわし，その単位は $\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$である．このように応力は**面に作用する力**(13)であり，物体の重心に作用して物体全体を移動させる力(14)とは区別せねばならぬ．

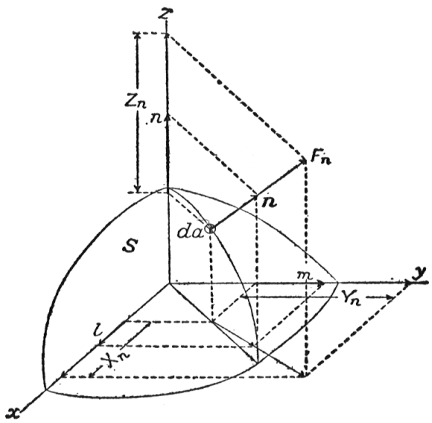
いま**第2・49図**のように弾性体内の面 S 上に一つの微小な面素 daを考え，この面の法線の方向を n とする． n の3軸方向の成分は方向余絃(15) $l\,m\,n$ である． da に作用する応力を K とし，その $x\,y\,z$ 方向成分を $K_x\ K_y\ K_z$ とすると， da に作用する力の法線成分の大きさは

(13)
$$F_n = K\cdot n\,da = \left(K_x l + K_y m + K_z n\right)da$$

であり，その方向は n方向である．よってこの力を

(14)
$$F_n = F_n n = F_n\left(l i_x + m i_y + n i_z\right)$$

と書くと，(16) F_n の座標成分は



第2・49図

(15)
$$F_n\,]_x = X_n\,da = F_n\,l,\quad F_n\,]_y = Y_n\,da = F_n\,m,\quad F_n\,]_z = Z_n\,da = F_n\,n$$

となる．ここに $X_n\ Y_n\ Z_n$ は S 上の daの位置の単位面積に作用する法線方向の力の $x\,y\,z$ 成分の大きさを表わしている．よってこれは da に垂直に作用する応力の成分を表わしている．

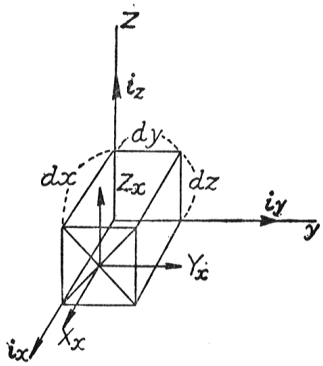
次に3稜の長さがそれぞれ $dx\ dy\ dz$ なる直方体を考え，その一つの表面たとえば $dy\,dz$ 面に作用する応力を考えてみよう(**第2・50図**)．この面の法線方向はx方向であるからこれを x面と命名し，この面に作用する応力を $K^{(x)}$ と記すと，面積 $da = dy\,dz$ に作用する力は

(16)
$$F^{(x)} = K^{(x)}da$$

である．この力の座標成分は

(17)
$$F_x^{(x)} = K^{(x)}\cdot l\,da,\quad F_y^{(x)} = K^{(x)}\cdot m\,da,\quad F_z^{(x)} = K^{(x)}\cdot n\,da$$

となる．(17) よって x 面に作用する応力の成分は



第2・50図

(18)
$$X_x = K^{(x)}l,\quad Y_x = K^{(x)}m,\quad Z_x = K^{(x)}n,$$

---

(13) surface force(表面力)　　(14) body force(物体力)

(15) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$　　(16) i_x, i_y, i_z, はそれぞれ x, y, z 方向を向く単位ベクトル．

(17) K は K の大きさを示す． F は F の大きさを示す．

となる．同様に $\cancel{d_x d_z}$ 面(法線方向 y)に作用する応力を $K^{(y)}$ すれば，これの座標成分は

(19)　$$X_y = K^{(y)}l,\ Y_y = K^{(y)}m,\ Z_y = K^{(y)}n,$$

また同様に $\cancel{d_x d_y}$ 面に作用する応力の成分は

(20)　$$X_z = K^{(z)}l,\ Y_z = K^{(z)}m,\ Z_z = K^{(z)}n,$$

となる．したがって直方体の表面に作用する応力は

(21)

	K_x	K_y	K_z
x 面	X_x	Y_x	Z_x
y 面	X_y	Y_y	Z_y
z 面	X_z	Y_z	Z_z

の９種類が存在し，その内 X_x Y_y Z_z はそれぞれ x y z 面に垂直であり，押しまたは引きの力(**張力または圧力**)を表わし，他の成分はいずれも面に平行に作用するので**剪断応力**(18)となる．この ９個の応力を一括して**応力テンソル**(19)という．

次に簡単な応力の例を示す．最も簡単なものは静水圧のような圧力である．この場合には任意の面に作用する圧力は常にこの面に垂直であり，その大きさを p とすれば

(22)　$$X_x = Y_y = Z_z = -p$$

と書け，他の応力は０である．よって応力テンソルは

(23)

	K_x	K_y	K_z
x 面	$-p$	0	0
y 面	0	$-p$	0
z 面	0	0	$-p$

となる．$-p$ としたのは物体の表面の外向法線を正とし，圧力が外から内向きに作用することを示している．

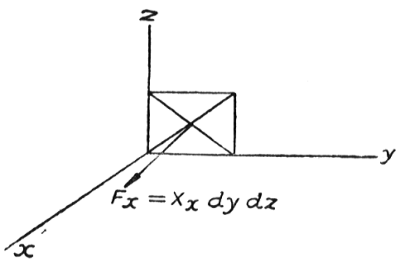
次の例は一方向たとえば x 方向に作用する張力を示す．このような場合には張力 p は $d_y d_z$ 面に垂直に作用する．よって応力は

(24)　$$X_x = p$$

となり，他の成分は０である．よって

(25)

	K_x	K_y	K_z
x 面	$\cancel{0}$	0	0
y 面	0	0	0
z 面	0	0	0

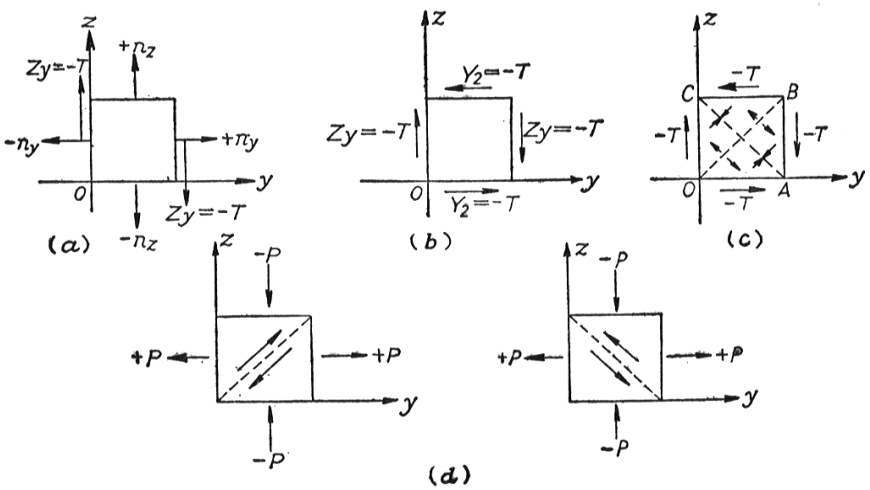


第２・51 図

(18) shearing stress　　(19) stress tensor

である(**第2・51図**).

第三の例として剪断応力を示す．**第2・52図a**のように相対する xz 面に大きさ等しく方向反対の力が切線方向に作用する場合を考える．面の外向法線 n_y は$+y$ 方向を正とすると，$+n_y$の面の応力 Z_y は $-z$ 方向を向いているから．これを $-T$ と記す．$-n_y$ 面でも n_yが負方向を向いているので，$+z$ 方向を向く応力は $-T$ と考えられる．よってこのような場合には $Z_y=-T$ と表わされ，他の



第2・52図

応力の成分は0と考えられるが，このままでは回転力を生じ，この直方体は回転する．もしも回転せずにとまっているとすれば，図の(b)のように，この回転力を打消すように，$Y_z=-T$ なる1組の応刀が yz 面に作用せねばならぬ．よって応力成分は

(26)

	K_x	K_y	K_z
x 面	0	0	0
y 面	0	0	$-T$
z 面	0	$-T$	0

の形である．このように（21）のテンソル成分の間に

(27)　　$Y_z=Z_y=-T$

なる関係があるものを，**対称型テンソル**と呼び，<u>応力は常に対称テンソルで表わされる</u>ことが証明される．このような形の応力を**剪断応力**と呼ぶ.

剪断力の作用している物体内に(c)図のように仮想面を考えると，直方体の一つの対角面 OB 上には OAと ABとの両面上に作用する $-T$ なる剪断力の合成された力に抗して物体を静止の位置に保つために抗張力か生じていると考えねばならず，もう一つの対角面CA上には合成圧力に抗する力が作用していると考えればならぬ．この圧力または張力に抗する力の単位面積あたりの大きさはT である．この応力が剪断力と平衡していることから，この対角面の法線方向を新しく座標軸に取れば，この物体には剪断力の代りに純圧力と純張力のみが作用すると見なすことができる。このような軸を**応力の主軸**という．したがって応力はその主軸を座標軸にとれば常に

(28)

$$\begin{array}{c|ccc} & K_x & K_y & K_z \\ \hline x\text{面} & X_x' & 0 & 0 \\ y\text{面} & 0 & Y_y' & 0 \\ z\text{面} & 0 & 0 & Z_z' \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{matrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{matrix}$$

なる対角線テンソルで表わせる．応力の主軸と直交する平面を**応力の主平面**といい，この面には常に垂直に作用する応力しか存在しない．なお応力の主平面に作用する垂直応力を**主応力**[20]といい，p_1 p_2 p_3 なる圧力で示される．

応力が物体内の至る所で一様に分布している場合を**均等応力分布**といい，均等応力の分布する物体内の任意の平行２平面に作用する応力の大きさおよび方向は互に相等しい．そしてこの応力は平面の方向の函数である．実際に均等応力分布を実現することは困難であるが，微小変位の場合には均等応力分布と考えて差支ない場合が多い．

(3)　弾性定数と変形のポテンシャルエネルギ -　　ヒズミの解析は純幾何学的であり，応力の理論は純静力学的である．この両者を関係づけるには物理的の仮定を必要とし，通常は **HOOKE[21]の法則**として知られている仮説を用いる．それは－

“弾性限界内では応力はヒズミの一次函数[22]で表わされる”と表現される．音響の問題として取扱うような微小変形の範囲では，この法則を全面的に許容して差支えない．もしもわずかでも HOOKE の法則からはずれるようなことがあれば弾性体の自由振動数は振幅によって変ることになるが，耳は振動数の変化に鋭敏であるから，振動の強さによって音の高さの変化するのを耳で判別することかでき，弾性限界を越えていることを検知することができる（これは **STOKES** が述べたことである）．

さて等方性物体[23]内では任意の２方向について全く同様な性質がなければならぬから，ヒズミの主軸と応力の主軸は一致しなければならず，[24]かつ主応力 p_1 は ε_2 と ε_3 を対称の形で含まねばならぬ．この条件と **HOOKE** の法則とを満足させるような形式は

(29)

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mu\varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mu\varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\mu\varepsilon_3 \end{aligned}$$

と書くことができる。ここに λ および μ は物質に固有の定数であり，ε が数値であるところから，λ と μ の単位は応力の単位と等しく $\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$ である．この $\lambda\mu$ を**弾性定数**[25]（LAME[26]の定数）と

(20)　principal stress
(21)　Robert HOOKE(1635－1705)： Gresham College の幾何学教授【1665-1703).
(22)　linear function
(23)　isotropic substance
(24)　LOVE：“Theory of Elasticity”Cambridge、1906 参照.
(25)　elastic constant
(26)　G.LAME(1795－1880)：Ecole polytechnique の物理学教授(1832-44).

呼ぶ．

等方性物質の弾性はすべて二つの弾性定数 $\lambda\mu$ で規定することができるが，変形が単純な二三の場合には別な形の弾性定数を用いることが便利な場合がある．その二三の例を示す．

第一は，物体が圧力変化を受けて膨脹または収縮する場合には，ヒズミを

(30)
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon=\frac{1}{3}\Delta$$

とおけば，これに対する応力は（29）より

(31)
$$p_1=p_2=p_3=p$$

と表わされ，かつ圧力 p と膨脹 Δ との間に

(32)
$$p=\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\Delta$$

の関係が存在する．ここに p と Δ の比例定数

(33)
$$\kappa=\lambda+\frac{2}{3}\mu=\frac{p}{\Delta}\qquad\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$$

は単位の膨脹を生ずるときに現われる応力の大きさを示す係数であり，これを**体積弾性率**(27)という．

次に剪断ヒズミを生ずる場合を考え

(34)
$$\varepsilon_1=-\varepsilon_2=\varepsilon,\quad \varepsilon_3=0$$

とおくと，（29）より

(35)
$$p_1=-p_2=q,\quad p_3=0$$

となり，剪断ヒズミ

(36)
$$\eta=2\varepsilon$$

と剪断応力 q との間に

(37)
$$q=\mu\eta$$

なる関係が成立する．この q と η との比例定数 μ は単位の剪断ヒズミを生ずるときに現われる剪断応力であり，これを**コワ**(28)という．その定義は

(38)
$$\mu=\frac{q}{\eta}\qquad\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right].$$

次に棒を伸ばす場合の伸びヒズミを考えてみる．棒の太さの変化はしばらく無視して伸びのみに着目し，伸びにより応力 p_1 のみが生じ，p_2 と p_3 は０であると考えると，（29）は

(39)
$$\begin{aligned}p_1&=\lambda\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+2\mu\varepsilon_1,\\0&=\lambda\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+2\mu\varepsilon_2,\\0&=\lambda\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)+2\mu\varepsilon_3\end{aligned}$$

(27) volume elasticity または cubic elasticity, bulk modulous ともいう．
(28) rigidity, 剛性率ともいう．

と書ける．これより ε_2 と ε_3を消去し，p_1 と ε_1との関係を求めると

(40)
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_1 ,$$

(41)
$$p_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(3\lambda+2\mu)\varepsilon_1 = E\,\varepsilon_1$$

となる．これより縦方向の単位の伸びによりその方向に生ずる応力の大きさとして

(42)
$$E = \frac{p_1}{\varepsilon_1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(3\lambda+2\mu) = \frac{3\kappa\mu}{\lambda+\mu} \qquad \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$$

なる弾性係数を得る．これを **YOUNG の弾性率**〈29〉という．

同じく引っ張り伸ばす場合の横方向（太さ）の変化は（40）より求められ，

(43)
$$\sigma = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad (\text{数値})$$

を **POISSON の比**〈30〉と呼ぶ．

以上の体積弾性率 κ，コワサ μ，**YOUNG** 率 E，**POISSON** 比 σ は実用上便利な弾性定数であり，これを用いて（29）を書き直すと

(44)
$$\begin{aligned} E\,\varepsilon_1 &= p_1 - \sigma(p_2+p_3), \\ E\,\varepsilon_2 &= p_2 - \sigma(p_3+p1), \\ E\,\varepsilon_3 &= p_3 - \sigma(p_1+p_2) \end{aligned}$$

と書け，また相互の間には

(45)
$$\kappa = \frac{\mu E}{9\mu - 3E}, \quad \lambda = \frac{E}{2\mu} - 1$$

なる関係がある．

なお λ と μとの間には特別の関係が存在せず，全く独立の定数であることが **KIRCHHOFF**〈31〉により確められた．普通の物体では **POISSON** 比は

$$\sigma = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{4} \qquad (\text{数値})$$

である．

変形に際して物体内に貯えられるポテンシャルエネルギーの形は，一様な膨脹の場合には

(46)
$$V = \frac{1}{2}p\,\Delta = \frac{1}{2}\kappa\,\Delta^2 ,$$

純剪断応力の生じた場合には

(47)
$$V = \frac{1}{2}q\,\eta = \frac{1}{2}\mu\,\eta^2 ,$$

〈29〉 YOUNG's modulous
〈30〉 POISSON's ratio
〈31〉 G.R.KIRCHHOFF (1824-87)：Heidelberg にて物理学教授(1854-75)，Berlin にて物理学教授(1875-87)、スペクトル分析の発見で有名．弾性理論とその棒および板の振動への応用で貢献あり．

太さの変らぬ棒の伸びの場合には

(48)
$$V=\frac{1}{2}p\varepsilon=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$$

であり，一般の変形の場合には

(49)
$$V=\frac{1}{2}\left(p_1\varepsilon_1+p_2\varepsilon_2+p3\varepsilon_3\right)$$
$$=\frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)^2+\mu\left(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\varepsilon_3{}^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\kappa\Delta^2+\frac{1}{3}\mu\left\{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2+\left(\varepsilon_3-\varepsilon_1\right)^2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon2\right)^2\right\}$$

となる．

第2・5表（a）　弾性体の密度 ρ および YOUNG 率 E（MORSE）.

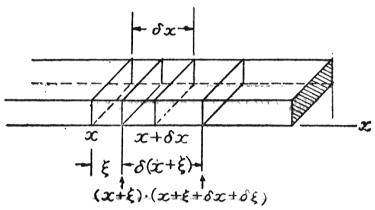
材料	E (N/m²)	ρ (kg/m³)	材料	E (N/m²)	ρ (kg/m³)
真鍮冷間圧延	9×10^{10}	8.6×10^3	コバルト鉄 (70 %Fe)	21×10^{10}	8.0×10^3
燐青銅	12 〃	8.8 〃	ニッケル	21 〃	8.7 〃
硬銅線	10 〃	8.9 〃	ニッケル鉄 (5 % Ni)	21 〃	7.8 〃
洋銀	11 〃	8.4 〃	硬銀線	8 〃	10.6 〃
ガラス	6 〃	2.6 〃	軟鋼	19 〃	7.7 〃
鋳鉄	9 〃	7.1 〃	インバール	14 〃	8.0 〃
鍛鉄	19 〃	7.6 〃	タングステン線	35 〃	19.0 〃

(b)　材料の弾性定数表 (LAMB).

	ρ (kg/m³)	E (N/m²)	μ (N/m²)	κ (N/m²)	σ
鋼	7.894×10^3	2.139×10^{11}	8.19×10^{10}	1.841×10^{11}	0.310
鍛鉄	7.677 〃	1.963 〃	7.69 〃	1.456 〃	0.275
鋳鉄	7.235 〃	1.349 〃	5.32 〃	0.964 〃	0.267
銅	8.843 〃	1.234 〃	4.47 〃	1.684 〃	0.378
ガラス (1)	2.942 〃	0.603 〃	2.40 〃	0.415 〃	0.285
ガラス (2)	2.935 〃	0.574 〃	2.35 〃	0.347 〃	0.229

2・3・2　棒の縦振動(1)

断面の形が一定たる真直な棒の長さの方向を x 軸とし，断面全体が一様に x 方向に変位するような運動を解析して見よう．これは最も簡単な形の運動の一つである．**第2・53図**のように，ある時刻 t に x なる位置にあった断面が δt なる時間の後に距離 ξ だけ x 方向に変位して $x+\xi$ の位置を占めたものとする．このような変形の際に x と $x+\delta x$ との２断面に狭まれた長さ δx なる部分に作用する応力を求め，これより運動の方程式を立てるのが目的であ



第2・53図

(1)　longitudinal vibration of bars

る． t なる時刻に δx の長さであった線分は $t+\delta t$ の時刻には

(50)
$$\delta(x+\xi)=\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta x$$

となっている筈であるから，ヒズミ ε の定義

(51)
$$\varepsilon=\frac{\delta(x+\xi)-\delta x}{\delta x}$$

にしたがえば，ヒズミと変位 ξ との間に

(52)
$$\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

の関係が成立する．棒の x 方向の **YOUNG** 率を E とすれば，(52) のヒズミによってこの断面に生ずる応力は (42) によって

$$\varepsilon E \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

となるから，棒の断面積を S とすると，断面に作用する力は

$$\varepsilon E S \qquad (\mathrm{N}).$$

また x と $x+\delta x$ との間にある質量の持つ運動量の加速度は

$$\rho S\delta x\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

であり，この質量に作用して運動を生ぜしめる力は x 面と $x+\delta x$ 面に作用する力の差であるから，**運動の方程式**は

(53)
$$\rho S\delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\delta\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$$

または

(54)
$$\rho S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=E\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$$

となる．この式は断面の形の任意な捧について成立する．特に断面の形が至る所一様であれば (54) は

(55)
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$
$$c^2=\frac{E}{\rho}$$

なる波動方程式となる．

(55) の解は絃の横振動の場合と全く同様の形となるからここでは繰返さないが，ただ変位 ξ は波動の進行方向 x 軸と平行な向を有していること，およびその伝播速度が $\sqrt{E/\rho}$ で定まり棒の持つ**固有張力**(2)に関係しないことが特長である．

両端固定捧は $x=0$ および $x=l$ で $\xi=0$ となるように境界条件を置けば，これも絃の振動の場合

(2) permanent tension

と同様に

(56)
$$\nu_n = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{(Hz)},$$
$$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

なる固有振動数を持つことが示され，その倍音は調和的である．

太い棒では**両端を自由**にしておいても振動させることができ，このような場合には自由端では端の面に応力が生じないと考えられるので，境界条件は

(57)
$$x = 0 \quad \text{および} \quad x = l \quad \text{にて} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

とおく．いま（55）の解を

(58)
$$\xi = f(ct - x) + F(ct + x)$$

と書くと（57）より

(59)
$$F'(ct) = f'(ct) \quad \text{および} \quad F'(ct + l) = f'(ct - l)$$

を得る．この初めの式を積分すると

(60)
$$F(ct) = f(ct)$$

となる．ただし積分定数は F または f の函数形内に含まれている．これと（59）の後の式より

(61)
$$F(ct + l) = f(ct - l) + C$$

を得る．ここに C は積分定数である． C を決定するために

(62)
$$\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) dx = c\int_0^l \left\{F'(ct + x) + f'(ct - x)\right\} dx$$
$$= c\left[F(ct + x) - f(ct - x)\right]_0^l = cC$$

を用いて棒全体の運動量を求めると

(63)
$$\int_0^l \rho S\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) dx = \rho S c C$$

となる．これを見ると，任意定数 C は棒の重心が x 方向に運動するときの運動量の大きさを示す定数であることが分かる．よって重心が固定しているときは $C = 0$ とおいてよい．この結果，解は $\frac{2l}{c}$ を周期とする周期運動であることがわかり，絃の場合と同様に固有振動数を有することがわかる．

次に**棒の縦振動の規準振動姿態**を示しておく．

一般解：

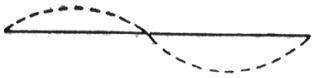
(64)
$$\xi = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)\cos(\omega t - \varphi).$$

両端固定： $x = 0$ および $x = l$ にて $\xi = 0$ ，

(65)
$$\xi_n = \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$
$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,$$

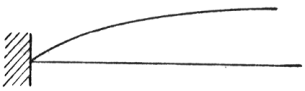
両端自由：　$x=0$ および　$x=l$　にて　$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$

(66)
$$\xi_n=\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+B_n\sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$
$$\omega_n=\frac{n\pi c}{l},\quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots,$$



第2・54図　両端固定棒の振動姿態（$n=2$）.

第2・55図　両端自由棒の振動姿態（$n=2$）.



第2・56図　一端固定，一端自由棒の基本振動姿態.

一端固定，一端自由[3]，：　$x=0$　にて　$\xi=0$　，　$x=l$　にて　$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$

$x=0$　にて　$\xi=0$ となるため（64）より　$A=0$　，

(67)
$$\xi=B\sin\frac{\omega x}{c}\cdot\cos(\omega t-\varphi),$$

これが　$x=l$　にて　$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}=0$ となるためには

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]_l=\left[\frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega x}{c}\cdot\cos(\omega t-\varphi)\right]_l=0,$$

(68)
$$\cos\frac{\omega l}{c}=0,\quad \frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\cdots\frac{2n+1}{2}\pi,\cdots,$$

よって

(69)
$$\omega_n=\frac{c}{l}\frac{m\pi}{2},\quad m=1,\ 3,\ 5,\cdots,$$
$$\xi_m=B_m\sin\frac{\omega_m x}{c}\cdot\cos(\omega_m t-\varphi),$$

または

(70)
$$\xi_m=\left(A_m\cos\frac{m\pi ct}{2l}+B_m\sin\frac{m\pi ct}{2l}\right)\sin\frac{m\pi x}{2l}.$$

この結果は空気柱の自由振動と同じ形であることが後に示される.

絃の横振動の波動伝播速度 c_1 と棒の縦振動の伝播速度 c_2 とを比較してみよう．絃の全張力を P (N) とすれば単位断面あたりの張力は P/S であり

(71)
$$c_1=\sqrt{\frac{P}{\rho S}},\qquad c_2=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

となるから，P による伸びを　ε_0 とすれば

(72)
$$P=E\varepsilon_0 S$$

であり，

（3）片持梁，canti-lever

(73)　$$\frac{c_1}{c_2}=\sqrt{\varepsilon_0}$$

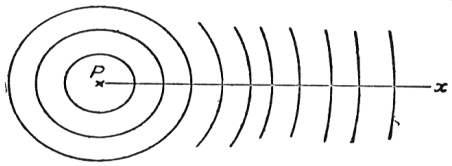
となる．ε_0 は小さな量であるから

(74)　$$c_2 \gg c_1$$

であり，したがって棒の縦振動の発する音の振動数は，同じ長さの絃の発する音より遙かに高いものなることが分る．このため棒の縦振動は発音体としては不便なものである．しかし非常に高い音(超短波)を出すためには有効である.(4)なおこの理論は棒の横方向の変位を無視しているが高周波の振動になるとこれも無視できなくなり，このように簡単に扱えぬことになるから注意を要する．

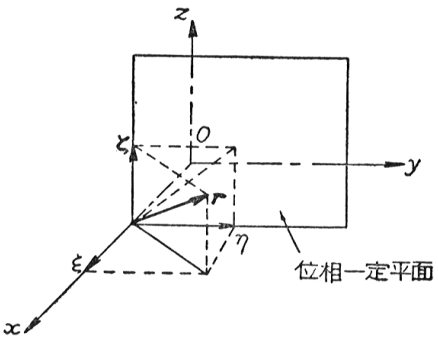
2・8・3　弾性体内の平面波，縦波，横波，表面波

無限に広い等方性弾性媒質内の一点に擾乱が生じると，その擾乱はヒズミの形で周囲の媒質に順次伝播し，各方向に均等に球面状をなして拡がって行く．このような波は擾乱波の等位相面が球状をなしているので**球面波**(1)という．擾乱源の近くでは球面波である波動も，源から充分遠方では，等位相面が波の進行方向に垂直な平面であるとみなすことができる.(**第2･57図**)このような波を**平面波**(2)といい，波源から遠ざかった波は常に平面波とみなして解析し得る．



第2･57図

平面波は波の伝播方向 x と垂直な平面上の至る所で波の位相および振幅が等しい．弾性波の場合は波として伝わるものは変位であり，x 軸に垂直な平面上では変位 r が至る所等しいと考えられる．よって r を x と t のみの函数と考えて扱えばよい．**第2・58図**のように変位 r の座標成分を $\xi\ \eta\ \zeta$ とすると，ξ は波の伝播方向 x に平行な変位であり，η および ζ は x と垂直方向の変位である.(3) 変位 r が完全に x 成分のみで $r(\xi,0,0)$ と書ける場合を**縦波**または**膨張波**(4)と呼び，この場合のヒズミと応力の関係は



第2･58図

(75)　$$p_1=(\lambda+2\mu)\varepsilon_1=\left(\kappa+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

と表わされる．x 軸に垂直な平面の単位面積を底とし高さ δx なる筒の両底面に作用する力の平衡の式は

---

(4)　下巻の磁歪振動子の項を参照せよ．
(1)　spherical wave
(2)　plane wave
(3)　η と ζ を合成したものも x と垂直方向の変位であるから，これを扱ってもよいが，ここでは η と ζ に分解しておく．
(4)　longitudinal or dilatational wave

(76)
$$\rho\,\delta x\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \delta p$$

と書けるから，(75) を代入すると

(77)
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$
$$a^2 = \frac{1}{\rho}\left(\kappa + \frac{4}{3}\mu\right) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

となり，変位 ξ は a なる速度で x 方向に伝播することが示される．

変位が完全に横方向で $r(0,\eta,\zeta)$ の場合には純剪断ヒズミを生ずる．このような波を**横波**(5)と呼ぶ．この場合のヒズミは x 軸に垂直な平面内にあって r 方向を向いているが，その y 成分および z 成分は

(78)
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{および} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

である．このヒズミによって生ずる応力の y および z 成分は

(79)
$$q_y = \mu \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad q_z = \mu \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

であり，これも x に垂直な平面内にある剪断応力である．よって単位面積を底とし δx なる高さの筒に作用する力の平衡関係は

(80)
$$\rho\,\delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \delta\left(\mu \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \qquad \rho\,\delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \delta\left(\mu \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

となり，これより η と ζ は同形の方程式

(81)
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$
$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

の解として与えられる．したがって横波は b なる速度で x 方向に伝播する．

このように縦波と横波とは伝播速度が異なるから，変位 r は何時までも一定の形を保っていることはできず，擾乱は伝播するにしたがってその波形が変化して行く．

弾性体の縦波，横波および前に述べた棒の縦振動の伝播速度を比較すると

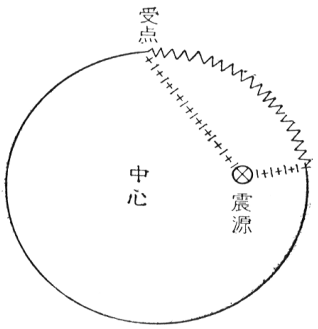
(82)
$$a > c > b$$

の関係にある．縦波の速度 a が棒の縦振動の速度 c より大きくなる理由は，縦波では媒質が無限の拡がりを持っているので横方向の変位は考えられず（平面波であるから），そのため伸び $\partial\xi/\partial x$ によるポテンシャルエネルギーが棒の場合より大きいためと考えられる。色々の物質についてこの三者を比較すると**第 2・4 表**のようになる．

なお弾性体に表面のある場合には縦波の伝播速度 a は上記の値とは全く異なる値を取る．この場合には縦方向の変位により媒質が伸び縮みをすると表面は屈曲を生じ，もはや縦波として成立せず，屈曲

(5) transversal または distortional wave

振動[6]となる．通常の屈曲振動は物体の寸法が振動の波長に比して余り大きくない範囲で考えられるのであるが，物体が波長に比して非常に大きな場合にもその表面のきわめて薄い層の中で屈曲振動が生じ，これが**表面波**[7]として伝播することが **Lord RAYLEIGH**(1885)によって発見された．この波を **RAYLEIGH** 波と呼び，その速度は非圧縮性固体の場合には $0.955b$ ，**POISSON** 比 $\sigma=\frac{1}{4}$ なる物体の場合には $0.9194b$ となる．



第2・59図　縦波，横波，表面波が震源から受点まで伝播する経路を示す．

第2・4表　各種の弾性体内の波動伝播速度（m/s）．

	$a=\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\kappa-\frac{3}{4}\mu\right)}$	$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
鋼	6.11×10^3	5.22×10^3	3.23×10^3
鍛鉄	5.68	5.06	3.16
鋳鉄	4.81	4.32	2.71
銅	5.08	3.74	2.25
ガラス（1）	5.00	4.53	2.86
ガラス（2）	4.74	4.42	2.83

a…縦波，b…横波，c…棒の縦振動．

な波は遠方に生じた地震の波が到来したときに記録される．すなわち

(1) 震源から直接くる縦波，

(2) 同じく　〃　　横波，

(3) 震源から真上の地球表面に出て表面を伝わってきた RAYLEIGH 波

の順序で３種の波が記録される．なお（3）の表面波は，(1)（2）が三次元空間に拡がるのに対して，二次元にしか拡がらぬので，(1)（2）に比して遙かに減衰が少なく，したがって遠方にまで到達する．

表面波については文献[8]を参照すれば詳しく理解できよう．

2・3・4　棒の屈曲振動[1]

静止の布置では真直な形をしている棒が横方向に振動する場合について解析するには，問題を単純ならしめるために次の仮定を設けて出発する（**第2・60図**）．

(i)　棒は長さの方向には平面対称な形を保つこと，

(ii)　屈曲運動はこの平面に平行なる方向の成分のみを有すること（この面を屈曲平面と呼ぶ），

(iii)どの断面上でも，この断面に作用する垂直応力の総和は零なること．

上記の仮定（iii）より，変位した状態における棒の x と $x+\delta x$ との間にある素片に作用する力は，

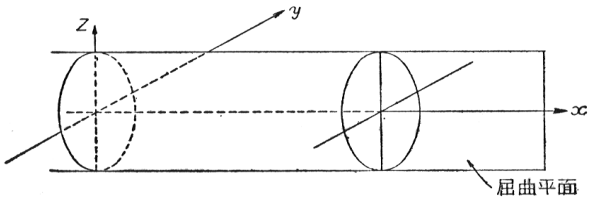
(6)　flexural vibration(タワミ振動)

(7)　surface wave

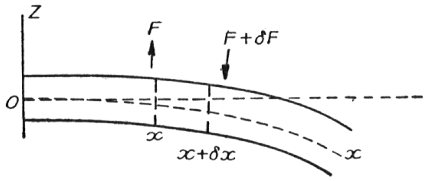
(8)　佐藤泰雄:"弾性体を伝わる表面波" 科学，Vol.19,No.7,p.311－319.昭和 24－7(1949).

(1)　flexural vibration of bar.屈曲振動は Lord RAYLEIGH:"Theory of sound"Vol.1.Chap.VIIに詳細に論じられている。

剪断力 δF と屈げの偶力 δM とに分けて考えられる．静止していたときに x の位置にあった中心線が横方向(z 方向)に変位する大きさを ζ とすると，剪断力に対する運動の方程式は



第２・60図



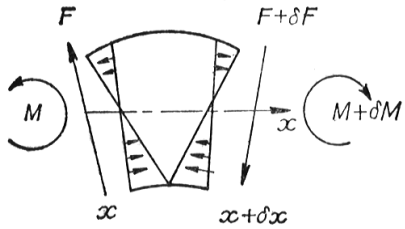
第２・61図

$$\rho S \delta x \ddot{\zeta} = \delta F,$$

または

$$\rho S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{84}$$

である．ここに ρ は棒の密度（kg/m²），S は断面積（m²）である（**第２・61図**）．



第２・62図

偶力 M に対する運動の方程式は，x 位置の断面がその重心を通り屈曲平面と直交する軸のまわりに回転する**回転半径**(2)(**第２・26図**)を $\bar{r}$ とすると，この面の静止の位置からの回転角は**第２・63図**に示す通り $\partial\zeta/\partial x$ とみなすことができ，この断面の質量は $\rho S \delta x$ と考えられ，その慣性能率は $\rho S \delta x \bar{r}^2$ であるから，この微小断面の回点運動に対する力の平衡の方程式は

第2・6表　断面積の回転半径.

断面の形状	寸　　法	回転半径 $\bar{r}$
矩形断面	屈曲平面に垂直な辺の長さ（幅）b 屈曲平面に平行な辺の長さ（厚さ）a	$\bar{r}=\frac{a}{\sqrt{12}}$
円形断面	半　径 a	$\bar{r}=\frac{a}{2}$
円　　環	外　径 a 内　径 b	$\bar{r}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

$$\rho S \delta x \bar{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \delta M + F \delta x,$$

または

---

(2)　radius of gyration of the cross section. 軸 OX に関する断面積 S の慣性能率は

$$I_n = \int_S y^2 da.$$

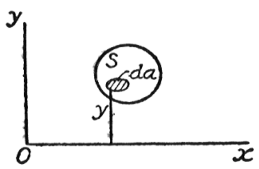
またこの面積の OX 軸に関する回転半径は

$$\bar{r}_x{}^2 = \frac{I_x}{S}$$

と定義される．これより I_x，S，r の間には

$$I_x = S \bar{r} x^2$$

が成立す．



(85)
$$\rho S\bar{r}^2\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial t^2}=\frac{\partial M}{\partial x}+F$$

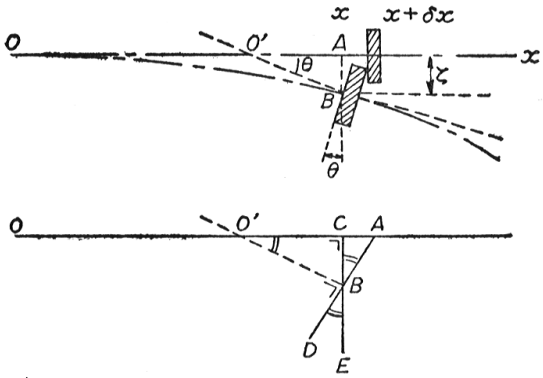
と書ける（第2・62図）．S が一様な場合には，(84) と (85) とから F を消去すると

(86)
$$\rho S\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\bar{r}^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial t^2}\right)=-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

次に偶力 M を変位 ζ の項で表現する形を求める．曲げられた状態においても中心線は伸縮ぜずに静止の位置のときの長さを保つものと仮定すると，**第2・64図**に示すように曲率半径 R なる円周の弧の形に曲げられた棒の z なる位置の層は，静止のときに比べて

(86)
$$\frac{R+z}{R}$$

倍に引き伸ばされている(もちろん z の負の領域は圧縮を受けているが)．したがって，この場合の伸びは z/R であり，伸びにより生ずる応力は，Ez/R なる張力が2方向に作用する．ここに E は YOUNG 率である．この伸びの全断面上の総和を求めると



変位した中心線への切線を $O'B$ とすると，切線の方向係数は $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ であるから，断面の回転角 θ は

$$\theta=\angle DBE=\angle CBA=\angle BO'A\approx\frac{\partial\zeta}{\partial x}.$$

第2・63図

(87)
$$\frac{E}{R}\iint z\,dz\,dy=0$$

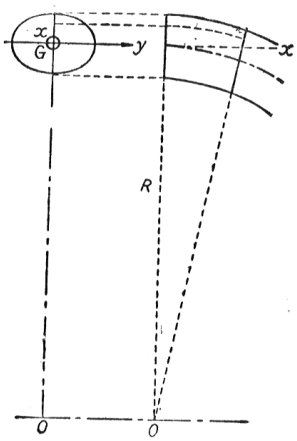
となり，最初に仮定した条件が満足されていることを示す．この張力による y 軸のまわりの偶力は

(88)
$$M=\iint\frac{E}{R}z\cdot z\,dy\,dz=\frac{E}{R}\iint z^2\,dy\,dz=\frac{ES\bar{r}^2}{R}$$

となり，$ES\bar{r}$ は断面の形と材質とによって定まる固有の値であるから (88) は

(89)
$$M=\frac{B}{R}\qquad(B\text{は定数})$$

なる形で示される．さらに断面の回転角 $\partial\zeta/\partial x$ は微小なものであるから



第2・64図

(90)
$$\frac{1}{R}\approx\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

とおくことができ，(86) は

(91)
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\bar{r}^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{E\bar{r}^2}{\rho}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=0$$

となる．(91) は**棒の屈曲振動の基礎方程式**である．

運動のエネルギーは

(92)
$$T=\frac{1}{2}\rho S\int\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\rho S\bar{r}^2\int\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial t}\right)^2 dx$$

で与えられる．(92) の第二項は棒の素片の回転運動によるエネルギーであり， 第一頃に比してきわめて小さい．ポテンシャルエネルギーは（48）より

(93)
$$\delta V=\frac{1}{2}E\varepsilon^2=\frac{1}{2}E\frac{z^2}{R^2}$$

を最初は断面上で z について積分し，次に長さの方向に x について積分すると

(94)
$$V=\frac{1}{2}ES\bar{r}^2\int\frac{dx}{R}$$

R^2

となる．

(91)を用いて棒の振動の性質を調べるために，無限に長い棒に単絃振動波が伝播するものと仮定し，(91）にて

(95)
$$\zeta=C\cos k(ct-x),\qquad k=2\pi/\lambda$$

とおいてみる．その結果は，（95）が（91）の解であるためには

(96)
$$c^2=\frac{k^2\bar{r}^2}{1+k^2\bar{r}^2}\cdot\frac{E}{\rho}$$

でなければならぬことが判明する．このことは，長い棒を伝播する屈曲振動波の伝播速度はその波長(すなわち伝播定数 k)の函数となり，棒に固有の一定値とはならないことを意味している．したがって任意の波形の振動を印加すると，その各 FOURIER 成分はそれぞれ各自に固有の伝播速度で伝播し，ある距離を伝播する内には始めの波形と異なる波形に変化する．このような性質の下では FOURIER 成分の重畳による一般解の方法はもはや適用できず，したがって一般解を求めることは断念せねばならぬ．ただ個々の問題について一々特別解を求める方法が残されている．

（95）を（91）に代入してみると第二項は第一項に比して， $k^2\bar{r}^2$ 程度の大きさとなることが分る．よって断面の寸法が長さに比較して小さい棒の屈曲振動において，その波長が断面の寸法に比してかなり大きい場合には（91）の第二頃は第一項に比べて無視し得る．このような場合には，運動の方程式は

(97)
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\frac{E\bar{r}^2}{\rho}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=0$$

となる．この式は通常の棒の屈曲振動を論ずるのに充分な精度を有している．ただしここで，偶力 M および剪断力 F は

$\bar{r}^2$

(98)
$$M=ESR\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2},\quad F=-\frac{\partial M}{\partial x}=-ES\bar{r}^2\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}.$$

(97) を解くのに， $\zeta=\cos(\omega t-\varphi)$ と仮定すると

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}=m^4\zeta,$$

$$m^4 = \frac{\omega^2 \rho}{E \bar{r}^2}$$

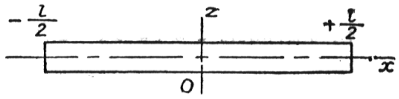
となり，この一般解は

(99)　$$\zeta = \left(A\,Cos\,mx + B\,Sin\,mx + C\cos mx + D\sin mx \right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi\right)$$

である．ここに A　B　C　D および　m（すなわち　ω）は境界条件によって定まる．

【自由－自由棒】

境界条件の例として最初は完全に自由なる棒の振動を調べてみる．棒がどの点でも拘束されていない場合には，棒の両端では偶力も生ぜずまた剪断応力も生じない．よって**第２・65図**のように原点を棒の中央にとれば



第２・65図

(100)　$$x = \pm\frac{\cancel{1}\ l}{2} \quad にて \quad \zeta'' = 0 \quad および \quad \zeta''' = 0.$$

この条件を用いれば（99）の四定数間の３個の比

$$A : B : C : D$$

と固有値 m とが定められる．その方法は色々あるが，まず棒が中心　$x = 0$　に関して**対称形**の振動をする場合を表わす解にのみ着目すると，変位は

(101)　$$\zeta = A\,Cos\,mx + C\cos mx$$

で表わされる筈であり，（100）を適用すると

(102)　$$A\,Cos\frac{ml}{2} - C\cos\frac{ml}{2} = 0,$$

$$A\,Sin\frac{ml}{2} + C\sin\frac{ml}{2} = 0$$

なる永年方程式を得る．これより A　と　C を消去すると，決定式として

(103)　$$Tan\frac{ml}{2} = -\tan\frac{ml}{2}$$

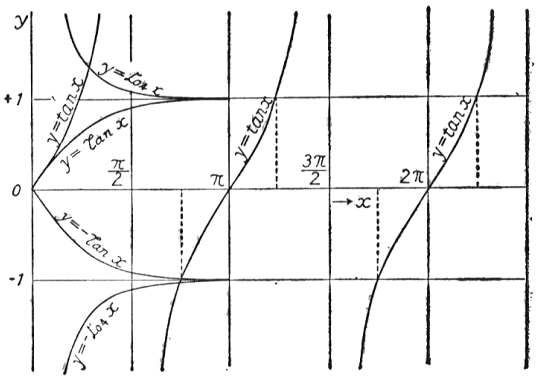
を得る．

これより~~物~~を決定するには**２・１・６**で述べた図式解法によるのが便利である．それには　$x = ml/2$　とおき　$-Tan\,x$ と　$+\tan x$　とをそれぞれ　x を横軸として描きその値（縦軸）の等しくなる点，つまり両曲線の交わる点に対応する　x の値を求める．そのような値は幾つもあるが**第２・66図**から明らかなように大体

(104)　$$x \approx \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

の附近にある．よって第 n　番目の交点を　x_n　とし

(105)　$$x_n = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \alpha_n$$



第２・66図

とおくと

(106)
$$\tan\alpha_n = \frac{1+\tan x_n}{1-\tan x_n} = \frac{1\cancel{+}^{-}Tan\,x_n}{1\cancel{-}^{+}Tan\,x_n} = e^{-2x_n}$$
$$= \zeta_n \cancel{+} e^{-2\alpha_n}$$

ここに

$$= \zeta_n \cancel{+} e^{-2n\pi+\pi/2}$$

とかける．　α_n は小さな値であるから

$$\alpha_n = \tan^{-1}\left(\zeta_n e^{-2\alpha_n}\right) = \zeta_n e^{-2\alpha_n} - \frac{1}{3}\zeta_n^{\,3} e^{-6\alpha_n} + \cdots$$

と展開すれば，ζ_n が微小な値であるから**繰返し近似法**(3)で α_n を決定することができる（ここに $\zeta_1 = 0.00898$），これより固有値は

(107)
$$m_n = \frac{2x_n}{l}, \quad \text{または} \quad \omega_n = \left(\frac{2x_n}{l}\right)^2 \bar{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}},$$
$$v_n = \frac{m_n^{\,2}}{2\pi}\bar{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad x_n = \left(n-\frac{1}{4}\right)\pi + \alpha_n,$$
$$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

と決定される．この結果対称形振動姿態の倍音系列は次表に示す比の振動数で現われることが分る．

次に**逆対称形**(4)の振動の場合を考える．この場合には

第2・7表　対称形振動姿態の倍音系列.

n	1	2	3	4	……
$\frac{\omega_n}{\omega_1}$	3^2	7^2	11^2	15^2	……

(108)
$$\zeta = B\,Sin\,mx + D\sin mx$$

で表され，境界条件から，B　D に関する永年方程式を求め，B　D を消去して決定式を作れば

(109)
$$Tan\frac{ml}{2} = \tan\frac{ml}{2},$$

この根は

(110)
$$x_{n'} = \left(n+\frac{1}{4}\right)\pi - \beta_n,$$

ここに　β_n　は

(111)
$$\tan\beta_n = \frac{1-\tan x_{n'}}{1+\tan x_{n'}} = \frac{1-Tan\,x_{n'}}{1+Tan\,x_{n'}} = e^{-2x_{n'}} = \zeta_n{}'\,e^{2\beta_n}.$$

ここに

$$\zeta_n{}' = e^{-2n\pi-\frac{\pi}{2}}.$$

よって

(112)
$$\beta_n = \tan^{-1}\left(\zeta_{n'}e^{2\beta_n}\right) = \zeta_{n'}e^{2\beta_n} - \frac{1}{3}\zeta_{n'}^{\,3}e^{-1\beta_n} + \cdots,$$
$$\zeta_1{}' = 0.00093$$

(3) successive approximation　　(4) antisymmetry

であり，対称形の場合より収斂は早い．この場合の倍音系列は**第2・8表**の通りとなる．

自由－自由棒の一般的な規準振動姿態は対称形と逆対称形とが相次いで現われるものである．したがってその固有値は

第2・8表　逆対称形振動姿態の倍音系列.

n	1	2	3	4	……
$\frac{\omega_n'}{\omega_1'}$	5^2	9^2	13^2	17^2	……

(113)
$$\frac{ml}{\pi}=1.50562,\quad 2.49975,\quad 3.50001,\cdots,\quad n+\frac{1}{2},\cdots$$
$$v_n=\frac{\pi}{2l^2}\left(\frac{ml}{\pi}\right)^2\bar{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\qquad \text{(Hz)}$$

なる値をとり，振動数比は

(114)
$$3^2,\quad 5^2,\quad 7^2,\quad 9^2,\quad 11^2,\cdots$$

となる．この結果は **CHLANI**[5]により実験的に確められている．

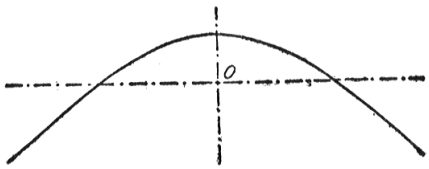
以上の結果により**自由－自由棒の対称形振動**の場合の変位は

(114)
$$\zeta=C\left[\cos\frac{ml}{2}\cdot Cos(mx)+Cos\frac{ml}{2}\cdot\cos(mx)\right]\cdot\cos(\omega t-\varphi),$$

ただし m と ω は固有値（107）を取る．最低の振動姿態は**第2・67図**のような形であり，その節は端から $0.224\,l$ の所にある．

同様に**自由－自由棒の逆対称形振動**の場合は

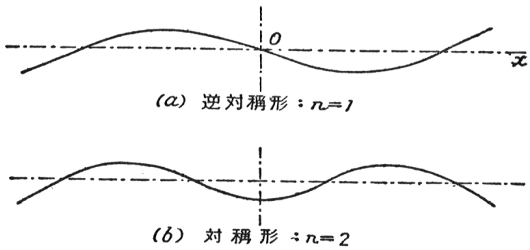
(115)
$$\zeta=C\left[\sin\frac{ml}{2}\cdot Sin(mx)+Sin\frac{ml}{2}\cdot\sin(mx)\right]\cdot\cos(\omega t-\varphi)$$



対称形 ： $n=1$

第2・67図　自由－自由棒の最低次振動姿態.

であり，この場合の m は（110）より決定する．**第2・68図**にその低次の姿態を示す．



第2・68図　自由－自由棒の振動姿態.

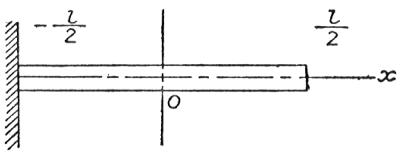
【固定－自由棒】（片持梁）[6]

原点は前と同様に棒の中央にとり，$x=-\frac{l}{2}$ の端が固定され $x=+\frac{l}{2}$ の端が自由に振動し得る場合を扱ってみる．自由端における条件は前と同じく

(116)
$$x=+\frac{l}{2}\quad\text{にて}\quad \zeta''=0,\quad \zeta'''=0$$

であるが，固定端の断面上では偶力 ζ'' と剪断力 ζ''' は値を持つ筈であり，ここでは変位 ζ およびその断面の回転角 ζ' が特に零に保たれる．よって固定端の条件は

(117)
$$x=-\frac{l}{2}\quad\text{にて}\quad \zeta=0,\quad \zeta'=0$$



第2・69図

(5) E.F.F.CHLADNI(1756-1827):"'Die Akustik" Leipzig,1802.Wittenberg にこ生れ Breslau で死す．音響学の実験的研究で有名な人である．　(6) canti－lever

と表わされる．

これらの条件を同時に満足するための一つの場合は

(118)
$$\zeta = A\,Cos\,mx + D\sin mx\,,$$
$$B = C = 0$$

の場合であり，この場合には

(119)
$$A\,Cos\,\frac{ml}{2} - D\sin\frac{ml}{2} = 0\,,$$
$$-A\,Sin\,\frac{ml}{2} - D\cos\frac{ml}{2} = 0$$

より固有値 m および振幅比 $A:D$ が決定される．固有値は

(120)
$$Cot\,\frac{ml}{2} = \tan\frac{ml}{2}\,,$$

(121)
$$\frac{ml}{2} = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \alpha_n{}'\,,\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots$$

で与えられる．ここに $\alpha_n{}'$ は

(122)
$$\tan\alpha_n{}' = \zeta_n\,e^{-2\alpha_n{}'}$$
$$\zeta_n = e^{-2\pi n - \frac{1}{2}\pi}$$

の根である．これは

(123)
$$\alpha_n{}' = \zeta_n\,e^{-2\alpha_n'} - \frac{1}{3}\zeta_n{}^3\,e^{-6\alpha_n'} + \cdots$$

で計算できる.(7)　$n=0$ の場合には，この繰返し近似法は適用できない（前掲 **第2・66図**参照）．

$n=0$ の場合には **FOURIER** が **"Theorie de la chaleur"**(1822)で述べている繰返し近似法を用いるのがよい．この方法はこの種の超越方程式の解を求める有力な一般的方法である．(122) をこの方法で解くにあたり，$\alpha_0{}'$ を x とおき

(124)
$$\tan x = Ae^{-2x}$$

と書き，$\tan x$ と Ae^{-2x} をそれぞれ x を横軸にして描く．両曲線の交点 x_0 が求める根であるが，最初はごく荒い第一近似値の x_1 から出発し（x_1 は x_0 より小さくとも大きくともよい），先ず

(125)
$$y_1 = Ae^{-2x_1}$$

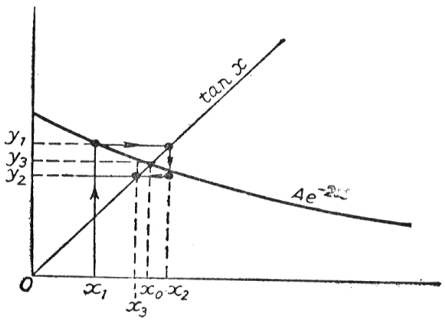
を求める．次に y_1 に相当する (124) の根

(126)
$$x_2 = \tan^{-1} y_1$$

を求めると，この x_2 は第二近似値となる．次いで x_2 に対して

(127)
$$y_2 = Ae^{-2x_2}$$

を求め，x の第三近似



第2・70図

(7) **2･1･6** 参照.

(128)　$$x_3 = \tan^{-1} y_2$$

を求める．これを数回繰返すと充分な近似度をもって x_0 に接近する．この方法は二つの曲線の x 軸に対する傾きが似た値になると収斂が悪くなるが，それ以外の場合には有力な方法である．

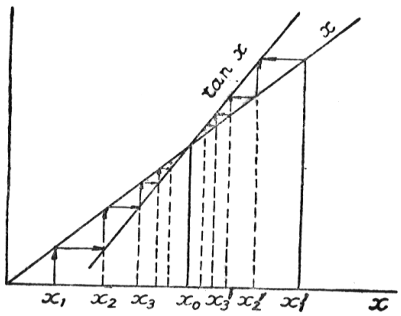
【例】　$\tan x = x$ の最小の根を求めること（**4・6・2** 参照）．

x_1 を正しい値 x_0 の近くの任意の値にとり

$$x_2 = \tan^{-1} x_1,\quad x_3 = \tan^{-1} x_2,\quad x_4 = \tan^{-1} x_3$$

と順次に求めて行くと次第に x_0 に近付く，x_0 は 1.4303 であるがこの方法により x_1 を 1.5 から始めると

$x_1, x_2, x_3, \cdots x_5$ の値は　1.5，1.433435，1.430444，1.430304，1.430297 となる．



第２・71図

もう一つの振動形は

(129)　$$\zeta = B\,Sin\,mx + C\cos mx,$$
$$A = D = 0$$

の場合である．この場合には

(130)　$$-B\,Sin\frac{ml}{2} + C\cos\frac{ml}{2} = 0,$$
$$B\,Cos\frac{ml}{2} + C\sin\frac{ml}{2} = 0$$

より

(131)　$$Cot\frac{ml}{2} = -\tan\frac{ml}{2}$$

を得る．この根は

(132)　$$\frac{1}{2}ml = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi - \beta_n',$$

β_n' は

(133)　$$\tan\beta_n' = \zeta_n' e^{2\beta_n'},$$
$$\zeta_n' = e^{-2\beta_n'}/2$$

より定まり，β_n' の小さい範囲では

(134)　$$\beta_n' = \zeta_n' e^{2\beta_n'} - \frac{1}{3}\zeta_n^3 e^{6\beta_n'} + \cdots$$

で計算される．

以上の両振動姿態より与えられる規準振動の固有値は

(135)　$$ml/\pi = 0.59686,\ 1.49418,\ 2.50025, \cdots (n - 0.5), \cdots,$$

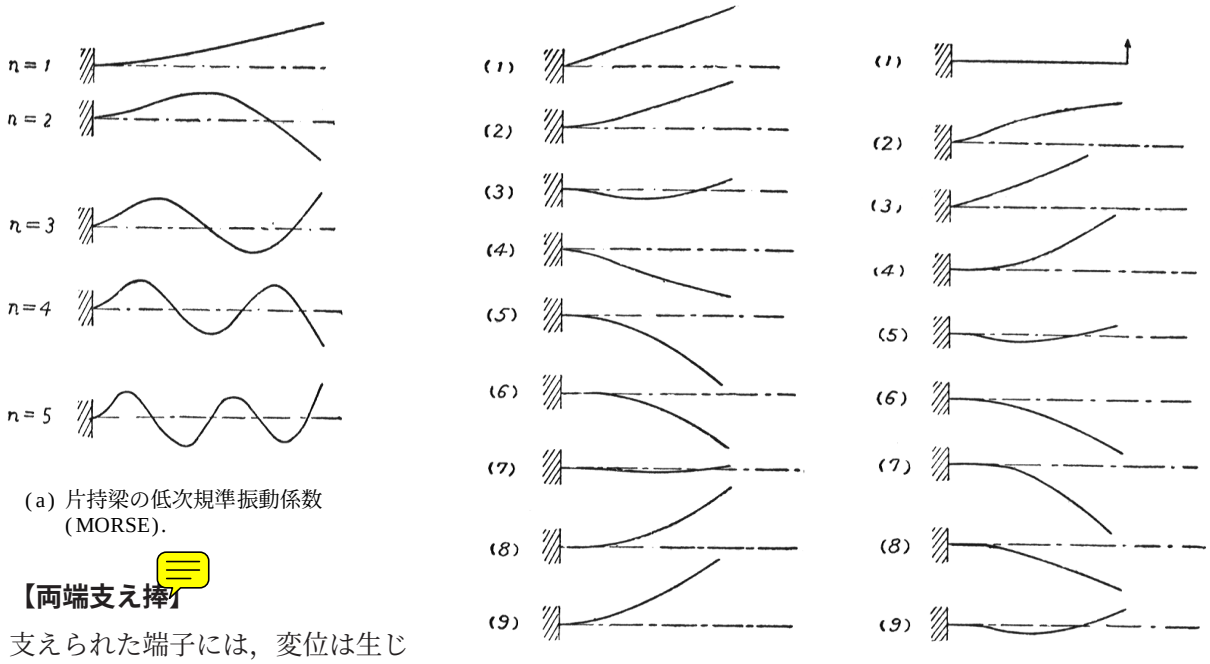
(136)　$$v_n = \frac{\pi}{2l^2}\left(\frac{ml}{\pi}\right)^2 \bar{r}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{(Hz)}$$

であり，　を除いて以後の倍音系列は，近以的に

第2・9表　固定自由棒の規準振動姿態の倍音系列.

n	1	2	3	4	……
$\frac{\nu_n}{\nu_1}$	—	3^2	5^2	7^2	……

第2・9表のようになっている．なお低次規準振動姿態の変位の形は**第2・72図(a)**に示すような形である．また自由振動をしながら変位波形がたどる形は**(b)(c)**に示してある．



(a) 片持梁の低次規準振動係数 (MORSE).

(b) 片持梁が(1)の形から出発して基本波の半周期内にたどる形を示す. (MORSE).

(c) 片持梁の尖端を打った後の半基本周期内の変位の波形を示す．高調波が調和的でないために(b), (c) の例は周期性を有しない (MORSE).

第2・72図

【両端支え棒】

支えられた端子には，変位は生じないが，断面の回転は自由である．したがって運動により偶力を生じない．よって境界条件は

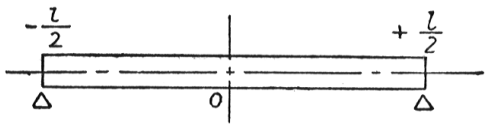
(137)　$x \pm \frac{l}{2}$　にて

$$\zeta = 0 \quad \text{および} \quad \zeta'' = 0.$$

この結果，**対称振動**は

(138)　$$\zeta = C \cos mx \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

(139)　$$\frac{ml}{\pi} = 1,\ 3,\ 5, \cdots$$



第2・73図

逆対称形振動は

(140)　$$\zeta = C \sin mx \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

(141)　$$\frac{ml}{\pi} = 2,\ 4,\ 6, \cdots$$

となる．この結果，規準振動姿態の倍音系列は

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \cdots,\ n^2, \cdots$$

となる．

$l^2/\bar{r}$

2・3・5　棒の振動の一般的性質

棒の振動の全般にわたって共通な事項をまとめておくと

(1) 固有値 m は長さ l に反比例するから，同一の材質でできている棒の周期 $T=2\pi/\omega$ は $\cancel{l^2\sqrt{\bar{r}}}$ に比例する．

(2) 幾何学的に相似形をなす多くの棒の周期は相似比に比例し，同じ断面を有する棒の周期は l^2 に比例する．

(3) 断面の形状と大きさの変化による振動数の変化はすべて回転半径 $\bar{r}$ によって表わされる．よって短形棒の周期は振動面に平行に測った厚さに比例し，これと垂直な方向の厚さには無関係である．ただしその厚さは節と節との長さに比して小さい場合である．もしもこの範囲を出ると，棒としては扱えず，板の振動と見做さなければならぬ．

(4) 棒の屈曲振動と縦振動との振動数を比較してみると両端自由な棒の屈曲振動の最低振動数は

(142)
$$v=\frac{\pi\bar{r}}{2l^2}\left(\frac{ml}{\pi}\right)^2\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\frac{\pi\bar{r}}{2l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\times(1.50562)^2,$$

また同じ棒の縦振動の最低振動は

(143)
$$v'=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

であるから，両者の比は

(144)
$$\frac{v}{v'}=7.122\frac{\bar{r}}{l}$$

となり，$\bar{r}$ l であるから v となり，屈曲振動は縦振動に比してかなりゆっくりしたものであることが分る．

以上は棒の自由振動に関する事項であるが，強制振動をさせると絃の場合のように共振現象が見られる．しかし余り必要がないから省いておく．

2・3・6　棒の屈曲振動の応用

棒の横振動を楽器として利用することは，その倍音が基音と協和しないために余りよい効果を与えない．しかし偏平な棒をその基本振動の節点で支える以外は自由に保っておき，やわらかな槌で打つとかなり倍音を弱めることができる．これが**木琴**(1)である．

棒の振動の最も重要な用途は**音叉**(2)である．棒を曲げることは，最低振動数を低くしかつその節の位置を中央に近寄せることが理論的にも実験的にも示されている．棒が細長いU字形をしていると，節点は曲った所のきわめて近くに生ずることが CHLADNI によって発見されている．よって曲りの部分の中央の振幅は尖端の振幅に比較して非常に小さい．この彎曲部中央に支持柄が取り付けられると振動状態はやや変化するが，この部分へのエネルギー伝達は比較的小さく，振動はかなり持続する．音叉はまた一端固定棒を２本組合せたものとも考えられ，その振動数の理論的計算に（136）の v_1 が用いられることがある．もしもこの類推が正しいものとすれば，上に述べたようなエネルギー損失は

(1) xylophon　　(2) tuning fork

存在しなくなる筈である．

重い音叉はバイオリンセロの弓を音叉の尖端近くにあててこすることによって励振させる．こうすることにより，励振点附近に節を有する倍音振動は抑圧することができる．一方基音は，音叉の柄を適当な寸法の**共鳴箱**(3)の上板にネジ止めすることにより強めることができる．

音叉がどんな方法でも励振された初めには，両側の棒の振動がその中央面に対して対称形とならないことがよくある．これは振動が非対称形振動との合成となっているためであり，この両者は一般にわずかの振動数の相違を有し，**ウナリ**を発生する．しかし支持柄が非常に強固に固定されていない限り重心の運動を伴なう非対称振動は支持柄にエネルギーが伝わることによりすみやかに減衰する．

音叉の基音に次ぐ倍音（第一倍音）は曲りに近い所を弓でこするとかなりの強さで抽出できる．この音は非常にキンキンした音である．

2・3・7　永久張力の影響

以上で棒の振動の基本的性質は一応説明できたのであるが，棒には永久張力が加わっていないという前提がある．もしも永久張力が加えられていると様相はやや変ってくる．このような問題は例えばピアノの絃の振動の場合に考えられる．

永久張力を P とすると，屈曲運動の方程式は

(145)
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c_0{}^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\bar{r}^2 E}{\rho} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4},$$
$$c_0{}^2 = \rho / PS$$

と書け，無限に長い絃の解が

(146)
$$\zeta = C \cos k(ct - x)$$

となるためには波動の伝播速度は

(147)
$$c = c_0 + c_1{}^2,$$

(148)
$$c_1{}^2 = k^2 \bar{r}^2 \frac{E}{\rho}$$

となることを必要とする．ここに c は永久張力のない絃の横波の，$2\pi/k$ なる波長の波の伝播速度である．ピアノの弦の場合には E/ρ は $c_0{}^2$ に比して遙かに大きく，$\bar{r}$ は基本波長に比してきわめて小さい．よって $(c_1/c_2)^2$ は非常に小さな値となり，基本波の伝播速度 c は事実上永久張力により影響をうけない．よって倍音系列は変化しない．ただし高次振動姿態に対しては，この影響が無視できなくなる．ピアノの弦の場合は弦を張るためのコマ（bridge）の所の境界条件が支えられているのか固定されているのかはっきりせぬために，規準振動姿態を正確に決定することは困難である．

2・4　環 の 振 動

棒を曲げて円環(1)にしたものの自由振動は解析によりその性質が明らかにされている．環の振動そ

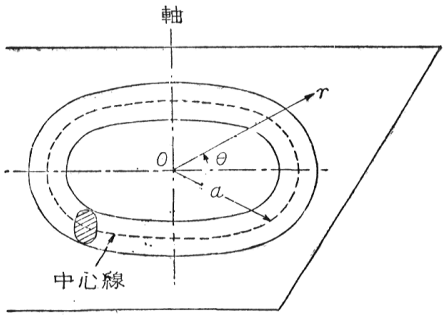
(3)　共鳴箱の寸法は，空気柱の振動の頃および**4･6**で述べる．
(1)　ring

れ自体は音響学的に大して重要なものではないが．実際の音響学上の問題で直接に明確な解の得られぬものが環の振動から類推できる場合があり，基礎的の知識として知っておく必要があるので，ここにその解法の全部を示すことにした．

ここに問題の対象とする環はその中心線が半径 a なる円形をなし，この中心線と直交する断面の形は中心軸を含む平面に対し対称形であるものとする．中心線のある平面と直交し，環の中心を通る直線を**環の軸**と呼ぶことにする（**第2・74図**）．なお振動はこの平面に平行な方向の微小な運動によるもののみに限って取扱うことにする．

環が振動したときに，環の各部分が受ける変位を極座標(r, θ)を用いて表わすことにし，変位の r 成分および θ 成分をそれぞれ u，v とする．u は環の微小部分の r 方向の変位であり，v は θ 方向の変位の長さである．[2] 変位をする前に (a, θ) なる位置にあった微小部分は u　v なる変位を受けた後には $(a+u, \theta+v/a)$ なる位置に移る．

この変位の結果生ずる環の伸びと曲率の変化が，まず求められればならぬ．変位が微小である範囲では，u と vとを別々に分けて取扱い，その和をもって合成の変位と考えることができる．変位をしないときの環の $\delta\theta$なる微小角に狭まれた部分の長さ（角方向の長さ）$a\delta\theta$ が，径方向に u，角方向に vだけ変位したためにどれだけ長さの変化を生じたかを求めてみる（**第2･75図**）．$\delta\theta$ が一定のままで径方向に uだけ変位した結果は角方向の長さの変化として



第2・74図

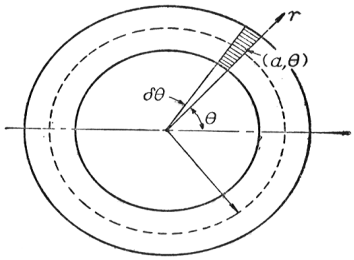
(149)　$$(a+u)\delta\theta - a\delta\theta = u\delta\theta$$

だけの増加をきたす．よって環の伸びはu/a である（**第2・74図**）．

次に a が一定で角変位 v のみが生じたとすると $(\theta+\delta\theta)$ なる位置にあった径ベクトルは

$$(\theta+\delta\theta)+v/a+\frac{\partial(v/a)}{\partial\theta}\partial\theta$$

に移る．よって変位前に $\delta\theta$ なる角で挟まれていた部分は，v なる変位を受けた後には



第2・75図

(150)　$$\left(1+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\partial\theta$$

なる角で狭まれることになり角の変化は $\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\theta}\partial\theta$ となる．したがって環の長さの変化は $\frac{\partial v}{\partial\theta}\partial\theta$ で

(2)　u は径変位（radial displacement），v は角変位（angular displacement）と呼ぶ．いずれも長さである．変位角度は v/a である．

あり，伸びヒズミは

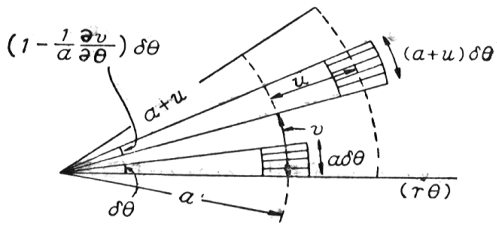
(151)　$$\frac{\partial v}{\partial \theta}\partial\theta \div a\,\partial\theta = \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

となる．径変化との和をもって両変化の合成とみなせば環の微小部分の変位による**伸びヒズミ**は

(152)　$$\frac{1}{a}\left(u+\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$

となる．

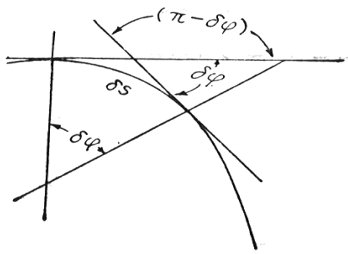
次に変位した結果生ずる曲率の変化を求める．曲率とは曲率半径 R なる曲線の微小線分 δs の両端に引いた切線のなす鋭角 $\delta\varphi$ が



第２・76 図

(153)　$$\text{曲率}=\frac{1}{R}=\frac{\delta\varphi}{\delta s}$$

なる関係で表わされるものをいう[3]（**第２・77 図**）．静止の位置で変形なる円形をなす環が**第２・78 図**のような形に変形したとすると，変位が零の点の法線 W_0 と径方向 r とのなす角 α は，$\delta\theta$ が小さい範囲では**第２・79 図**のように考えられるので，



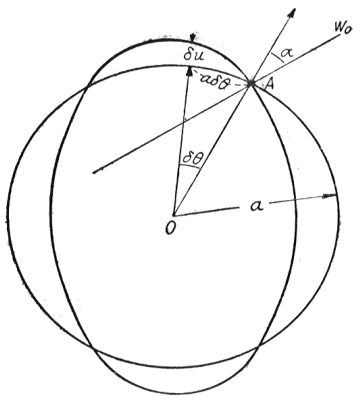
第２・77 図

(154)　$$\sin\alpha=\frac{\delta u}{a\,\delta\theta}$$

とおくことができ，これより α の小さな値に対して

(155)　$$\alpha\approx\frac{\partial u}{a\,\partial\theta}$$

と書ける．環全体を通じて変位 u は微小と考えられるからすべての点の法線と径方向とのなす角は（155）で表わされる．**第２・80 図**にて $\delta\theta$ なる角に挟まれた部分の長さは変形すると $(a+u)\delta\theta$ なり，この部分の両端に引いた法線 W_1 と W_2 の r 方向からの傾きは，W_1 の傾きを α とすると，W_2 の傾きは



第２・78 図

(156)　$$\alpha+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial u}{a\,\partial\theta}\right]\delta\theta=\alpha+\delta\alpha$$

と表わされる．W_1 と W_2 のなす角を $\delta\varphi$ とすると，**第２・81 図**より

(157)　$$\delta\varphi+\alpha+\delta\alpha=\delta\theta+\alpha\,,$$

または

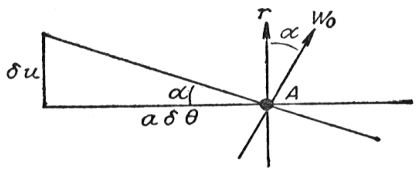
$$\delta\varphi=\delta\theta-\delta\alpha\,.$$

よってこの部分の曲率は(153)より

（３）　これが曲率の定義である．

(158)
$$\frac{1}{R}=\frac{\delta\varphi}{(a+u)\delta\theta}=\left(\delta\theta-\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\delta\theta^2}\delta\theta\right)\Big/(a+u)\delta\theta$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right)$$

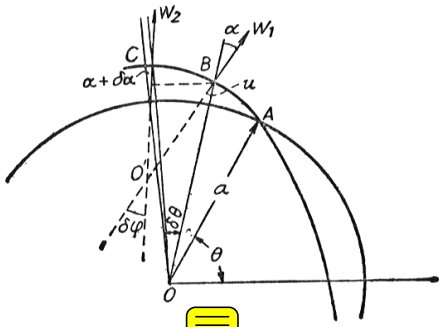
となり，角方向変位 v は曲率の変化に寄与しないことが示される．これより環が変形したときの**曲率の変化**は



第２・79 図

(159)
$$\frac{1}{R}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right).$$

任意の断面に作用する応力は**径方向剪断応力** P，**角方向の切線張力** Q および**曲げ偶力** M に分解して考えられる．この内で Q と M は，環の断面積を S，その回転半径を $\bar{r}$ とすれば

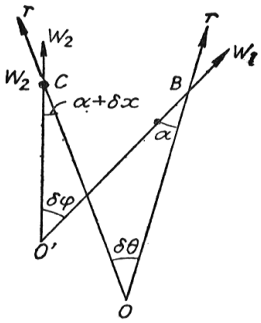


第２・81 図

(160)
$$Q=\frac{ES}{a}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right),$$
$$M=\frac{ES\bar{r}}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right),$$

とかくことができる．(4)(5)

次に $\rho Sa\delta\theta$ なる部分に作用する力の平衡の式を立てる．**第２・82 図**において，まず径方向および角方向の力についてそれぞれ平衡条件を求めると



第２・81 図

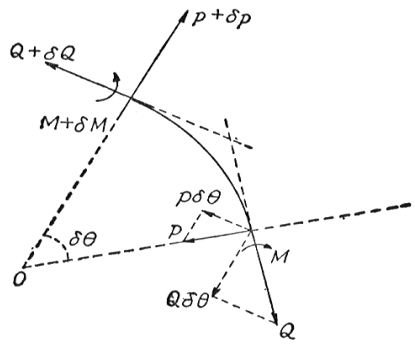
(161)
$$\rho Sa\delta\theta\ddot{u}=\delta P-Q\delta\theta,$$

(162)
$$\rho Sa\delta\theta\ddot{v}=\delta Q+P\delta\theta.$$

環の軸のまわりの偶力の平衡の条件は断面の回転による慣性能率を省いて考えると

(163)
$$\delta M-Pa\delta\theta=0$$

となる．これより**運動方程式**は



第２・82 図

(164)
$$\rho Sa\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial\theta}-Q,$$

(165)
$$\rho Sa\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial Q}{\partial\theta}+P,$$

(166)
$$\frac{\partial M}{\partial\theta}=Pa$$

---

(４)（52）のあとの理論および（88）より（160）を得る，
(５) M は環の振動平面内にあり．環の曲率を変化するように作用する．

となる．これと（160）とより環の振動を解くことができる．

この連立微分方程式は張力 Q が消滅したという仮定は満足しないことが容易にわかる．したがって<u>いかなる姿態でも常にいくらかの伸びが伴う振動をする</u>ことがうなずける．このような伸びは，環の二つの部分が互に反対方向に変位する部分に常に生ずる．しかしここに扱う屈曲振動姿態の場合にはこの伸びは曲率の変化に比して小さい．

運動方程式から　P　Q　M　を消去すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{E}{\rho a^2}\left\{u+\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}+\frac{\bar{r}^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}\right)\right\}=0, \tag{167}$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}-\frac{E}{\rho a^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \theta^2}-\frac{\bar{r}^2}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}\right)\right\}=0. \tag{168}$$

規準振動を確めるために u と υ が $\cos(\omega t-\varphi)$ にしたがって変化するものと仮定し，さらに環は完全に閉じた円であり，u と υ は θ の周期函数であり，その周期は 2π であると仮定する．この仮定の下では u　υ を　θ の **FOURIER** 級数に展開することができ，さらにその各項それぞれ（167）（168）を別々に満足することが証明される．これより，この場合に充分な仮定として

$$\begin{aligned} u &= A\cos n\theta\cdot\cos(\omega t-\varphi), \\ \upsilon &= B\sin n\theta\cdot\cos(\omega t-\varphi), \\ n &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots \end{aligned} \tag{169}$$

を取ればよいことになり，これより

$$\begin{aligned} &\left\{\beta-1-n^2\left(n^2-1\right)\frac{\bar{r}^2}{a^2}\right\}A-nB=0, \\ &-\left\{n+n\left(n^2-1\right)\frac{\bar{r}^2}{a^2}\right\}A+\left(\beta-n^2\right)B=0, \end{aligned} \tag{170}$$

ただし

$$\beta=\frac{\omega^2 a^2 \rho}{E} \tag{171}$$

を得る．よって A と B を消去して

$$\beta^2-\left\{n^2+1+n^2\left(n^2-1\right)\frac{\bar{r}^2}{a^2}\right\}\beta+n^2\left(n^2-1\right)^2\frac{\bar{r}^2}{a^2}=0 \tag{172}$$

より固有値 β_n が定まる．しかるに $\frac{\bar{r}}{a}$ は小さい値であるから β の係数は近似的に n^2+1 であり，かつ $n^2\left(n^2-1\right)\frac{\bar{r}^2}{a^2}$ も微小である．よって（172）の根は近似的に

$$\begin{aligned} \beta_{n1} &= n^2+1, \\ \beta_{n2} &= \frac{n^2\left(n^2\overline{+}1\right)^2}{n^2+1}\cdot\frac{\bar{r}^2}{a^2}, \end{aligned} \tag{173}$$

（173）の最初の根 β_{n1} の場合には大略　$B=nA$ となり，真直な棒の縦振動の姿態に対応した振動をする．したがって，ポテンシャルエネルギーは主として伸びによって与えられ，その場合の振動角速度

または振動数は

$$\omega_{n1}{}^2 = \left(n^2+1\right)\frac{E}{\rho a^2} \qquad (\mathrm{rad/s}),$$

(174)

$$\nu_{n1} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2\pi a}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (\mathrm{Hz})$$

となり，(56) と比較すると同じ位の寸法のものでは同程度の値となる．なお $n=0$ の場合には純然たる径方向の振動をする．

もう一つの根 β_{n2} に対応する姿態は大略

$$A+nB=0$$

となり，この方がここでは重要である．この場合 (169) は

$$u = A\cos n\theta\cdot\cos\left(\omega_{n2}t-\varphi\right),$$

(175)

$$\upsilon = -\frac{A}{n}\sin n\theta\cdot\cos\left(\omega_{n2}t-\varphi\right),$$

となり，(152) に代入すると分かるように，伸びは無視し得る程度であり，エネルギ - は主として屈曲に関係する．事実，振動数は棒の屈曲振動と同程度であり，第 n 次の振動姿態では $2n$ 個の節を生ずる．ただしこの場合の節というのは径方向の変位 u が生じない位置を指し，この位置は静止の位置ではない．径方向の節の点は角方向の変位が最大となっている．

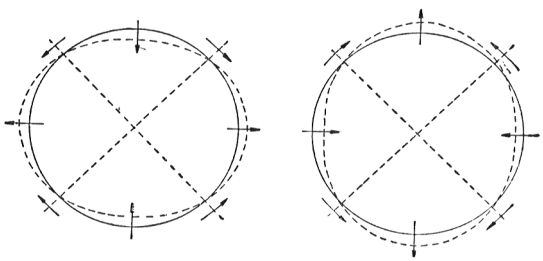
$n=1$ の場合は環が変形を受けずに全体がそっくり変位する場合にあたり，したがって周期は無限大となる．重要な場合は $n=2$ の場合では環は楕円形に変形されるような振動をする．**第 2･83 図**はこの振動姿態を示す．点線の直径は径方向変位の節線の位置である．

環の振動で注意しておかねばならぬ現象がある．それは環が均質にできていると仮定できる場合には，θ の原点のとりかたは全く任意であり，同じ振動数をもった他の振動姿態の解は θ に定数を附加することによって表すことができる．特に屈曲振動姿態では (174) と等しい振動数を持った別の姿態として

$$u = A\sin n\theta\cdot\cos\left(\omega t-\varphi\right),$$

(176)

$$\upsilon = \frac{A}{n}\cos n\theta\cdot\cos\left(\omega t-\varphi\right)$$



第 2 ・83 図

が存在する．この姿態は当然前の姿態 (169) と縮退して振動姿態はある程度不確定となる筈である．しかしもしも環に 1 箇所でも不均質の部分があると情勢は一変してしまう．実際に作られた環が普通に持っている欠点として，たとえば，その厚さが 1 箇所だけ厚いようなものがこの原因となる．この不均質の点が径方向変

位の腹になるか，節になるかで振動の性質は多少異なり，固有振動数もわずかに変化する．その結果両姿態が同時に励振されると，その差音にあたる**ウナリ**が聞えてくる．これは鐘や鉢の振動の場合にしばしば認められる現象であり，その固有値の不一致は形がわずかに対称形から狂っているためである．

（173）の形は，最初から伸びを無視して解いても求まる．すなわち

$$u+\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}=0 \tag{177}$$

とおき

$$u=u_0 \sin m\theta\,, \qquad \upsilon=\frac{u_0}{n}\cos n\theta \tag{178}$$

と仮定すると運動のエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\left(u^2+\upsilon^2\right)a\,d\theta=\frac{1}{2}\frac{n^2+1}{n^2}\pi\rho\, S a u_0{}^2, \tag{179}$$

ポテンシャルエネルギーは（94）を用いて

$$V=\frac{1}{2}E S\bar{r}^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)^2 a\,d\theta=\frac{1}{2}\left(n^2+1\right)\frac{\pi E S\bar{r}^2}{a^3}u_0{}^2\,. \tag{180}$$

ここで

$$u_0=C\cos\left(\omega t-\varphi\right) \tag{181}$$

とおき，全エネルギ - $T+V$ を一定とおくと（174）の表現を得る．しかしこの方法には張力の省略による誤差がかなり含まれている．

以上に述べた環の振動は，その平面内の振動は **R.HOPPE** が 1871 年に始めて解き，屈曲振動に対する簡単化した解決は **Lord RAYLEIGH** により与えられた．環の平面と垂直な方向の変位を含む振動は屈曲のみならず戻りも加わるのでさらに複雑であるが，1889 年 **J.H.MICHELL** により解かれている．それによると円形断面の環の固有振動数は

$$\omega_n^2=\frac{n^2\left(n^2-1\right)^2}{n^2+1+\sigma}\frac{E\bar{r}^2}{\rho a^4}\,, \tag{182}$$

ここに σ は **POISSON** の比である．

環の振動に似たものでフィンガーボールの振動がある．ボールの縁の上の一点を指で軽く押え，他の点を濡らした指でボールの不縁に沿って弓で弾くようにこすると，指で押えている点が径方向の節となって振動する．中の水の波紋はここから 45 ° はなれた径方向振動の振幅最大の点で著るしく現われる．

2・5　板の屈曲振動

板の屈曲振動の理論は，膜の振動理論に厚さを加えて三次元に拡張したものと考えることができるが，これは弦の振動理論から棒の振動理論に移るときの取扱の困難さの増加から想像して，数学的の扱いが容易なものでないことが予想できる．その結果として一見簡単に見える現象が未だに未解決の

まま残されていることも別に不思議なことではない．

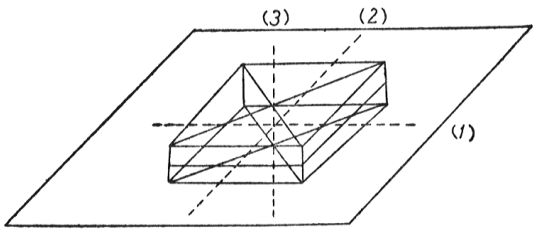
一方実験的には，現象は案外容易に示される．板を水平においてその上に細かい砂を一面に播き，板の一点を固定しておいて特定の規準振動姿態を励振すると，砂は振動の激しい部分から弾き飛ばされて，静止の位置である節線上に集まる．そのため，節線の形が砂の縞模様となって現われる．板にある特定の姿態を励振するには通常は板の上の一点または数点を指で押さえ，絃楽器の弓で板の縁を板の面と直角にこすればよい．特に短形の板を用いその中心を固定した場合には，中心点が幾つかの姿態の共通の節点となっているので，色々と変った美しい模様が得られる．この方法で **CHLADNI** は様々の図形を求めた．その多くは実験音響学の指導書に再録されている．

板の振動を理論的に取扱うには，ヒズミと応力の主軸の一つが板の平面と直交し，~~かつ~~この方向の応力は消滅しているものと仮定する．したがって主応力の一つたとえば $p_3=0$ とおくと，**2･3･1** の(44) より主応力の形は

（1）
$$p_1=E'\left(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2\right),$$
$$p_2=E'\left(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1\right),$$

ただし

（2）
$$E'=\frac{E}{1-\sigma^2}$$



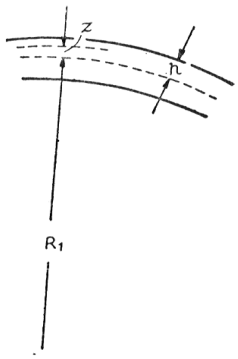
第２・84 図

となる（**第２・84 図**）．板の任意の点の主曲率半径を R_1 および R_2 とすると，[1]屈曲したときの伸びと主曲率半径との関係は **2・3・4** の第２・64 図の関係から

（3）
$$\varepsilon_1=\frac{z}{R_1},\qquad \varepsilon_2=\frac{z}{R_2}$$

となる．ここに z は板の中心平面からの距離である．板の上に主曲率曲線で囲んだ小さな短形を仮定すると，その短形素片の各辺の単位長に作用する偶力の大きさは

（4）
$$M_1=\int_{-h}^{h}p_1 z\,dz=\frac{2}{3}E'h^3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right),$$
$$M_2=\int_{-h}^{h}p_2 z\,dz=\frac{2}{3}E'h^3\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\sigma}{R_1}\right)$$



第２・85 図

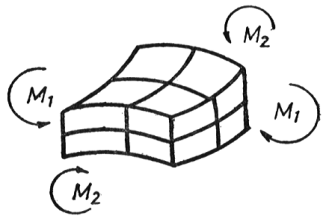
となる．ここにｈは板の厚さの半分を示す（**第２・85 図**）（**第２・86 図**）．単位体積あたりのポテンシャルエネルギーは

（5）
$$u=\frac{1}{2}\left(p_1\varepsilon_1+p_2\varepsilon_2\right)$$
$$=\frac{1}{2}E'\left(\varepsilon_1^{\,2}+2\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^{\,2}\right)\qquad (\mathrm{J/m^3})$$

（1） 主軸（1）（3）の作る平面内の曲率を R_1^{-1} ，（2）（3）の作る平面内の曲率を R_2^{-1} とす．それぞれ主曲率という．

であるから，(3) を代入し z について $-h$ から $+h$ まで積分すると板の単位面積あたりのポテンシャルエネルギーは

（6）
$$u=\frac{1}{3}E'h^3\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2{}^2}\right)\qquad (\mathrm{J/m^2}).$$



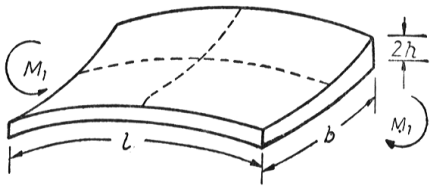
第２・86 図

(4) を短形断面の平たい棒が一様に曲げられた場合に適用して見よう．平板棒の幅を b ，厚さを $2h$ とする（**第２・87 図**）．b なる長さの１組の辺に M_1b なる偶力が作用して R_1 なる曲率で曲げられたものとする．一方、他の１組の辺には外力が少しも作用しなかったとすると（4）にて $M_2=0$ とおかねばならぬ．よって

（7）
$$\frac{1}{R_2}=-\frac{\sigma}{R_1}$$

なる関係を必要とし，かつ曲げ偶力の大きさ M_1b は

（8）
$$M_1b=\frac{2}{3}\frac{E'bh^3}{R_1}$$



第２・87 図

でなければならぬ．これは，断面積が $S=2bh$ ，回転半径は $\bar{r}^2=\frac{1}{3}h^2$ であるから，**２・３・４**の (88) と一致する．この結果より短形断面の板の１組の平行な辺に沿って１組の偶力が作用すると，他の辺に沿って逆方向の曲率 $R_2{}^{-1}$ すなわち**抗砕片性曲率**(2)が生じその曲率の大きさは強制力によって生ずる曲率 $\frac{1}{R_1}$ の σ 倍であることが明らかになる．この原理は **CORNU** (3) (1869) および **MALLOCK** (1879) により，材料の **POISSON** 比 σを測定するのに用いられ．その場合曲率は光学的の方法で測定された．この結果より完全に自由な矩形板は指のように節線が１対の対向辺に平行な姿態では振動し得ない．その理由はもう１組の辺に、抗砕片性曲率に反抗する偶力を加えねばこのような姿態にならぬためである．

一般に板が振動する場合には主軸 x の大きさと方向とは場所によって異なる値をとり，さらに板の平面に垂直な剪断力も作用している．これらの条件を用いて運動の方程式をたてることは，かなり繁雑なことであるが，しかしもう困難な問題ではない．むしろ困難は板の自由端の条件にある．(4) の誘導に用いたような単純なヒズミの関係は，端においては近似的にも成立せず，端の附近の厚さにほぼ等しい距離の範囲では，ヒズミの状態が特別の形を取っていることが多い．その著しい例は縁に直角な断面上に作用する剪断力は異常に大きな値を示すことである．これらの理論的取扱法はここでは省くことにし，その主要な結果のみを次に述べておく．詳しくは文献(4)を参照されることを望む．

板の振動の振動数を決定すべき**固有値**は，一般に

（9）
$$\omega_n{}^2=\frac{1}{3}\frac{E'}{\rho}h^2m_n{}^4$$

（2） anticlastic curvature

（3） A.M.CORNU:(1841－1902) ,Ecole polytechnique の物理学教授，光測度の測定， その他光学に関して貢献あり。

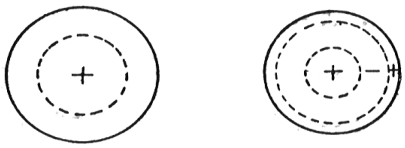
（4） Lord RAYLEIGH:"Theory of souod"Cbap.10.A.E.H.LOVE"A Treatise on the MathematicaI Theory of Elasticity"・Cambridge,1906. Chap.22[4th.ed.1934].

の形で与えられる．ここ ρ は体積密度，mは特定の超越方程式から定まる長さの逆数の単位を持った定数である．この結果，幾何学的に相似形をなす板の振動数はその厚さに比例して増し，またその厚さ方向の寸法の平方に反比例して変る．またその体積密度にも反比例する．

円形の板の縁が自由な状態にあるものは，振動にあたって同心円形の節線と等間隔に配置する直径節線とを生ずる．特に対称形姿態の場合は POISSON が 1829 年に解いており，その最低次振動は $0.678\,a$ の所に節線を生じ，次の姿態は $0.392\,a$ と $0.842\,a$ の所に節線を生ず（**第2・88図**）a は円板の半径である．この場合の固有値m は $\sigma=\dfrac{1}{4}$ と仮定すれば

(10)　$$m^2a^2=8.8897,\qquad 38.36$$

より定められる．σ は POISSON 比である．



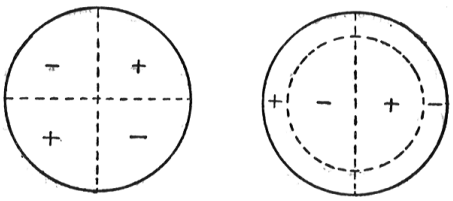
第2・88図　縁が自由な円板の姿態対称形.

固定されない円形の板の完全な解は 1850 年 KIRCHHOFF が完成した．その結果すべての姿態の内で最も振動数の低い姿態は 2 本の節線直径を有し，節線円を持たぬものであることが明らかにされた．その振動数は，

(11)　$$v=0.523\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\qquad \left(\sigma=\frac{1}{4}\right)$$

または

(12)　$$v=0.517\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\qquad \left(\sigma=\frac{1}{3}\right)$$



第2・89図

で与えられる．**第2・89図**は節線直径を 1 本または 2 本存在する姿態を示す．

縁を固定された円板の振動は POISSON その他によって解かれているが，最低次の対称形振動姿態の振動数を決定するのには次の近似方法を用いることができる．板の変位をζ とするとき，その形をあらかじめ

(13)　$$\zeta=\zeta_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2$$

と仮定する．この形は $r=a$ で $\zeta=0$ および$\partial\zeta/\partial r=0$ となるので，固定端の条件である変位および傾斜が零となることを満足する．半径方向に切った断面の曲率は

(14)　$$\frac{1}{R_1}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}=-\frac{4\zeta_0}{a^2}\left(1-3\frac{r^2}{a^2}\right)$$

であり，これに対してもう一つの主曲率半径は対称軸で切り取られた法線の長さであり

(15)　$$\frac{r}{R_2}=-\frac{\partial\zeta}{\partial r}$$

より求められる．これに（13）を代入すると

(16)
$$\frac{1}{R_2}=\frac{4\zeta_0}{a^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

となる．よって $\sigma=\frac{1}{4}$ と仮定し（5）と（16）を用いて板の単位面積あたりのポテンシャルエネルギーを計算すると

(17)
$$u=\frac{16}{3}E'h\left(\frac{5}{2}-10\frac{r^2}{a^2}+\frac{23}{2}\frac{r^4}{a^4}\right)\frac{\zeta_0{}^2}{a^4}\qquad(\mathrm{J/m^2}).$$

これに $2\pi r\delta r$ をかけて $r=0$ から a まで積分すると，板全体のポテンシャルエネルギーは，

(18)
$$V=\frac{64}{9}\frac{\pi E'h^3}{a^2}\zeta_0{}^2\qquad(\mathrm{J}),$$

運動のエネルギーの形は

(19)
$$T=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\dot{\zeta}^2\,2\pi r\,dr=\frac{1}{5}\pi\rho h a^2\dot{\zeta}_0{}^2\qquad(\mathrm{J}).$$

よって $\zeta=C\cos(\omega t-\varphi)$ とおき，$T+V=$ 一定 なる条件より ω を求めると

(20)
$$\omega^2=\frac{320}{9}\frac{E'h^2}{\rho a^4},$$

または

(21)
$$\omega=5.963\sqrt{\frac{E'}{\rho}}\ \frac{h}{a^2}\qquad(\mathrm{rad/s})$$

となり，**POISSON** の求めた正確な方法による結果の係数の値 5.898 と比較してほぼ 1 % 程度の誤差の範囲で一致する．

板の振動は**水中通信**の振動板に用いられるので重要なものであるが船腹の穴にあてがわれた円板は外面が水と接しているために，その固有振動は空気中にあるときに比べてかなり低められる．直径 147 mm（7 吋） 厚さ 35 mm（0.18in）の鉄板は、空気中では 1013（Hz）の固有振動を持っているが，水に接すると 550（Hz）に低下する．さらに水中に音のエネルギーが放射されるためにかなりの減衰を生じ，その減衰率は約 5 サイクルの振動期間と等しい．

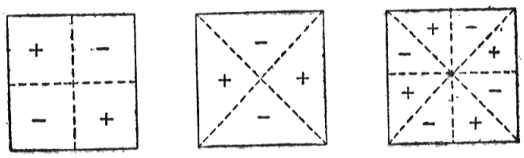
正方形板の振動はさらに難解である．正方形膜の場合と同様に縮退を生ずるので，振動姿態は著しく複雑なものとなる．自由端を有する正方形板の最低次振動は，中心を通り辺に平行な節線を生ずる．その他二三の対称振動姿態を示すと**第 2・90 図**のようになる．

正方形板の規準振動の振動数系列は **RITZ**(1909 年) が $\sigma=0.255$ の仮定の下に求めた．その最低振動数の場合の固有値は，辺の長さを $2a$ とするとき

(22)
$$m^4a^4=12.43$$

であり，振動数は

(23)
$$\nu=0.332\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\qquad(\mathrm{Hz})$$



第 2・90 図

となる．

以上は，平板の振動を扱ってきたが，曲った板の振動は **Curved Shell** の名の下に取扱われている．**RAYLEIGH** と **LOVE** の著書を参照されたい．