# 第　三　章

# 音　波

第一章および第二章においては音波の発生源と見做される種々の物体の振動理論を紹介した．本章から愈々音波すなわち空気中を伝わる音響を取扱うことになる．音響の諸現象は発音体から受音体までを含めて考えねば，具体的に理解することはできない．しかし最初からこのように総合的に現象を取扱うことは，問題を複雑にするばかりで現象を理解するよすがとはならない．本章では発音体や受音体は一時除外し，発音体から発せられた音が受音体に到達するまでの途中において媒質の中を波動として伝播して行く有様を究明する．空気をも含んで一般に流体中の波動の伝播は前に述べた弾性体内の縦波の伝播によく似ている．したがって最初は気体を弾性体として見た時の性質から述べることにする．

## 3・1　　気体の弾性~~(K)~~

気体の状態は圧力 $p$(pascals)，密度 $\rho$ (kg / m$^3$)　および温度 $\theta$(K) の３変数で示される．なお密度 $\rho$ の代わりに気体の単位質量の占める体積 $v$を用いることもある．この場合，$M$ を気体の全質量，$V$ を全容積とすると

（1）　　$\rho = M / V$,　　$v = V / M$

であるから

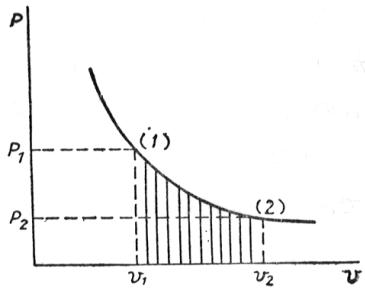
（2）　　$\rho = \dfrac{1}{v}$　　(kg / m$^3$)

なる関係が存在する．$v$ を比体積[1] と呼ぶ．

熱力学においては温度 $\theta$をパラメータとし $\rho$と $v$ とを二つの独立変数として状態の変化を論ずるこの場合 $p$を縦座標，$v$ を横座標として状態変化を図示すると

（3）　　$\int_{v1}^{v2} p\,dv$　　(J / kg)

で与えられる面積は単位質量の気体を第３・１図の（１）の状態から（２）の状態に変化させるのに必要な仕事量の大きさを表わす．これを理解するために $p$ なる圧力の気体が変形自在な膜に包まれて外圧と平衡している場合を考えて見る．[2] 外からの作用によりこの膜面がその法線方向にわずかの距離 $\varepsilon$ だけ移動したものとすると，この体積



第3・1図

（1）　specific volume, $\rho$　は dencity または specific weight (比重).
（2）　ゴム風船かシャボン玉を想起せよ．

変化により膜の内の気体に加えられる仕事量は

（4）　$$\delta w = \sum p\delta S \cdot \varepsilon = p\delta v \qquad (\mathrm{J/kg})$$

である．ここに $\delta S$ は膜面上の微小面積であり

（5）　$$\sum \delta S \cdot \varepsilon = \delta v$$

は $\varepsilon$ なる変位による膜内の体積変化である．よって（4）は（3）の形にかくことかできる．この値の正負は外力が気体に仕事をするか，なされるかによって異なる．

気体の状態の変化の途中においては温度変化を伴うのが普通である．しかし理論的に取扱う場合に $pv\theta$ が同時に変化すると問題を繁雑にし，取扱が困難となる場合が多いから，通常は等温変化[3] および断熱変化[4] と呼ばれる二つの極限の場合を取扱う．等温変化とはその名のように，変化の途中において気体温度が一定に保たれている状態をいい，断熱変化とは変化の途中においてその系と外界との間に熱量の出入が無いような変化をいう．これらの状態を具体的に実現することは困難であるが近似的にこれ等の状態に近い現象はしばしば生じている．音波の振幅が微小な場合にはこの仮定は実際問題によく一致するものであることが次第に明らかとなるであろう．

完全気体(理想気体)[5] においては $pv\theta$ の間に

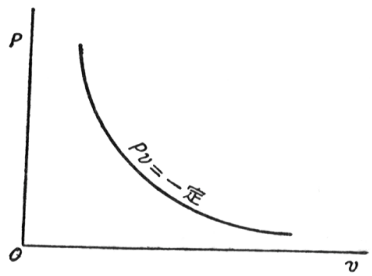
（6）　$$pv = R\theta, \qquad \text{または} \qquad p = R\rho\theta$$

なる関係が存在する．ここに $R$ は気体定数と呼ばれ気体に固有の値であり，$\theta$ は熱力学温度 (K)[6] で表わした温度である．(6) を理想気体の状態式[7] と呼ぶ．

等温変化の場合には $\theta$ は一定に保たれているので，(6) は

（7）　$$pv = \text{一定}$$

と表わされ，状態図は $pv$ 両軸を漸近線とする直角双曲線となる．(7) は等温変化の状態式であり第3・2図はその状態図である．



第3・2図　等温変化の状態図．

断熱変化の状態式を求めるには少し手数を要する．最初気体の単位質量を比体積一定の下に圧力を $\delta p$ だけ増すのに必要な熱量を考えてみる．この熱量は

（8）　$$P\delta p \qquad (\mathrm{J})$$

の形で表わされると考えられる．ここに $P$ は圧力変化には関係せぬ未定定数である．さらに比体積一定の場合の気体の単位質量当りの比熱[8] を $C_v$ とすると，$\delta p$ なる圧力増加を生ずるために $P\delta p$ なる熱量が加えられ $\delta\theta$ だけ温度が上昇した場合の熱量の平衡式は

---

（3）　isothermals
（4）　adiabatics
（5）　perfect gases(ideal gases)
（6）　0℃=273.15K, thermodynamic temperature
（7）　equation of state, 示性式ともいう．
（8）　specific heat capacity, 温度を１K高めるのに必要な熱量(J/K)．$C_v$ 容比熱，$C_p$ を恒圧比熱という．

(9)　$$P\delta p = c_v \delta\theta$$

である．しかるに ~~(7)~~ より

(10)　$$p\delta v + v\delta p = R\delta\theta$$

なる関係式を得るが，比体積一定の下では $\delta v = 0$ であり

(11)　$$v\delta p = R\delta\theta,$$

よって（11）と（9）より

(12)　$$P = \frac{c_v \theta}{p}.$$

同様に圧力一定の下で比体積を $\delta v$ だけ増すのに必要な熱量を $Q\delta v$ とし，恒圧比熱を $c_p$ とすると

(13)　$$Q\delta v = c_p \delta\theta,$$

(10) より

(14)　$$p\delta v = R\delta\theta,$$

よって

(15)　$$Q = \frac{c_p \theta}{v}.$$

(12) と (15) を用いて比体積と圧力とが同時に変化した場合の熱量変化を求めると

(16)　$$P\delta p + Q\delta v = \theta\left(c_v \frac{\delta p}{p} + c_p \frac{\delta v}{v}\right)$$

となるが，もしも断熱変化であれば，これは零とならねばならぬ．よって

(17)　$$\frac{\delta p}{p} + \frac{c_p}{c_v}\frac{\delta v}{v} = 0$$

なる微分方程式を得る．実際問題においては $c_p / c_v$ は一定であるから

(18)　$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

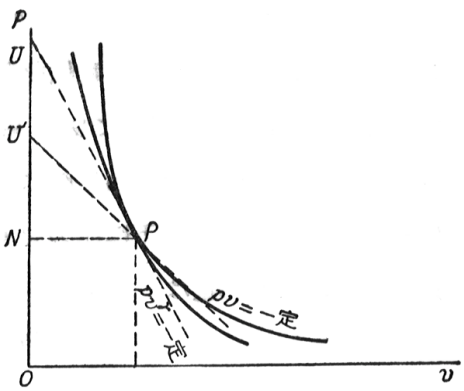
とおくと，(17) の解は

(19)　$$\ln p + \gamma \ln v = 一定,$$

または

(20)　$$pv^{\gamma} = 一定$$

となる．(19) または (20) が断熱変化の状態式であり，第3・3図はその状態図を等温変化と，比較して示してある．実験によれば空気，窒素などに対し約 1.41 である．



第3・3図

気体は圧力 $p$ と体積 $v$ とを変数としてその弾性を表現するのが便利である．ある温度において ($p$, $v$) なる状態にあった気体が ($p+\delta p, v+\delta v$) なる状態に変化した場合を考えると，膨脹率 [9] $\Delta$ は

(9)　dilatation

(21)　$$\Delta = \frac{\delta v}{v} \qquad \text{(数値)},$$

圧縮率[10]は

(22)　$$-\Delta = -\frac{\delta v}{v}$$

であるから，体積弾性率[11]は

(23)　$$\kappa = \frac{\delta p}{-\Delta} = -v\frac{\delta p}{\delta v} \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

となる．この値は初めと終りの状態のみならず，その変化の過程の形によって値を異にする．

$\kappa$ の値は状態図第3・3図から求めることができる．最初の状態 $(p, v)$ を表わす点を $P$ とし，$P$ にて状態曲線に切線 $PU$（または $PU'$）を引くと，$v$ の値は $NP$ であり，切線と $Ov$ 軸とのなす角は

(24)　$$-\frac{\delta p}{\delta v} = \tan \angle \underline{NPU} \qquad \text{または} \qquad \angle \underline{NPU'}$$

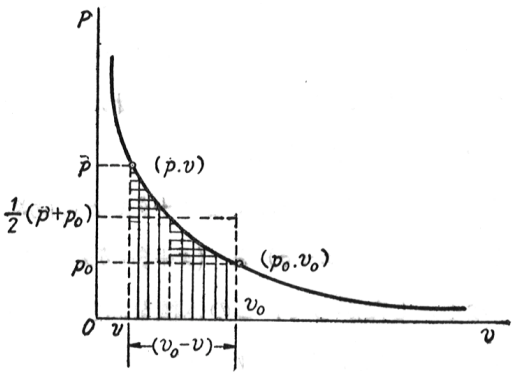
であるから

(25)　$$-v\frac{\delta p}{\delta v} = NU \qquad \text{または} \qquad NU'$$

となる．ここに $U$ と $U'$ はそれぞれ断熱変化および等温変化の状態曲線の切線の足である．

$(p, v)$ なる状態から $(p_0, v_0)$ なる状態に移るのに必要な仕事量を第3・4図から求めると

(26)　$$w = \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v)$$
$$= p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 - v)$$



第3・4図

となる．これは $\frac{1}{2}(p + p_0)$ なる一定圧力の下に $(v_0 - v)$ だけの体積変化をしたときの仕事量と考えて求めてある．この近似法は第二近似まで正しい．この方法で等温変化の場合を計算すると，$pv = p_0 v_0$ なる線に沿う変化であるから，

(27)　$$w = \int_v^{v_0} p\,dv = p_0 v_0 \ln\frac{v_0}{v} \qquad (\mathrm{J/kg}).$$

また断熱変化の場合は

(28)　$$w = \int_v^{v_0} p\,dv = \frac{pv - p_0 v_0}{\gamma - 1} \qquad (\mathrm{J/kg})$$

となる．

(10)　compression または negative dilatation
(11)　volume elasticity または cubic elasticity

## 3・2　平　面　波[1]

気体内を伝わる音波も音源から遠く離れた場所では平面波とみなし得ることは，2・3・3の弾性体内の平面波と同様である．このような場合を論ずるための出発点として

(1)　気体の運動方向は至る所音の伝播方面 $x$ 軸に平行である，[2]

(2)　ある瞬間の時刻における運動は $x$軸に垂直な平面上では至る所同一の形をとる

という仮定を設ける．音波が伝播する媒[3]を構成する気体の微小体積を一つの質点粒子と考え，この粒子が擾乱のない場合に $x$ なる平衡の位置にあり，擾乱によって $x$ 方向に $\xi$ だけの変位を生じたと考えると，気体の圧力 $p$ および密度 $\rho$ の瞬時値は $\xi$ と共に，時刻 $t$ および位置座標 $x$ の函数となる．擾乱のない場合の圧力および密度をそれぞれ $p_0$ および $\rho_0$ 記せば，擾乱による気体の膨脹率は

（1）　$$\Delta = \frac{v - v_0}{v_0}, \qquad \text{または} \qquad v = v_0(1+\Delta),$$

凝縮率[4]は

（2）　$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \text{または} \qquad \rho = \rho_0(1+s)$$

である．よって定義により

（3）　$$(1+\Delta)(1+s) = 1, \qquad \text{または} \qquad \Delta + s + s\Delta = 0$$

となる．音波の振幅が微小な場合には $\Delta$ と $s$ との積は二次の無限小となるので（3）より

（4）　$$\Delta \approx -s$$

なる関係を得る．これはよく用いられる重要な関係式である．

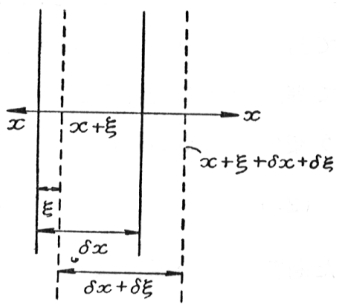
### 3・2・1　波動方程式

擾乱のないときに平面 $x$ と $x+\delta x$ との間にはさまれている気体の体積は，擾乱の生じた後の $t$ なる時刻には平面 $(x+\xi)$ と $(x+\xi+\delta x+\delta\xi)$ との間にはさまれることになる．したがって，この体積を囲む２面間の距離は $\delta x$ から $\delta x+\delta\xi$ に変化する．しかるに $\delta\xi$ は

（5）　$$\delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x$$

と考えることができるので，[5] 層の厚さの変化は

$$\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta x$$



第３・５図

---

（1）　平面音波の解析は EULER (1747) および LAGRANGE (1759) により確立された．

（2）　理想気体で粘性のない場合には気体の一部の運動により剪断応力は生ぜず（マサツ力が生じないから），純圧力または張力のみが作用するので，擾乱は気体の変位方向にのみ伝播し，縦波のみが生ずる．

（3）　medium

（4）　condensation. 密度の増加率である．単位は数値である．

（5）　$\frac{\partial\xi}{\partial x}$ は $x$ 軸に沿う $\xi$ の変化の割合を示す．　2・3・2 参照．

となる．よってこの部分の膨脹率は

（6）　$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \text{(数値)},$$

したがって凝縮率は

（7）　$$s = -\Delta = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \text{(数値)}.$$

次に圧力を凝縮率 $s$, したがって $\xi$ の項で表わしておくことが望ましいので 3・1の (23) より

（8）　$$\delta p = -\kappa \frac{\delta v}{v} = -\kappa \Delta = \kappa s \qquad \text{(Pa)}$$

となることを利用して

（9）　$$p = p_0 + \delta p = p_0 + \kappa s \qquad \text{(Pa)}$$

と表わす．

(7) と (9) とを用意しておいて，平面 $x$と $x+\delta x$との間の気体の質量に対する運動の方程式を立てる．この平面の単位面積に作用する力の平衡の式は

(11)　$$\rho_0 \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\delta p \qquad \text{(Pa)}$$

とかける．ここに $\delta p$は平面の前面における圧力増加の大きさである．これと (7) および (9) とより

(11)'　$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$
$$c = \sqrt{\kappa / \rho_0} \qquad \text{(m/s)}$$

なる平面波動方程式を得る．この解は絃の振動の所で示した通り

(12)　$$\xi = f(ct - x) + F(ct + x) \qquad \text{(m)}.$$

### 3･2･2　音の伝播速度

(11) において $c$を音の伝播速度と呼び，媒質を構成する気体の体積弾性率 $\kappa$と擾乱のない場合の密度 $\rho_0$ との比であたえられる定数である．大気中の音の伝播速度(音速)は最初 NEWTON が皆の擾乱によって大気の温度は変化しないから近似的に等温変化であろうと仮定し,BOYLEの法則を用いて

(13)　$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + s$$

より

(14)　$$\kappa = p_0$$

とし

(15)　$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$$

（1）　"Principia"(1726)．第二巻 Prop.48

を得た．しかし 0°C の空気に対し

(16)　$p_0 = 0.76 \times 13.60 \times 10^3 \times 9.81$　$(\mathrm{N/m^2})$，

$\rho = 1.29$　$(\mathrm{kg/m^3})$

より（15）の $c$ を求めると

(17)　$c = 280$　$(\mathrm{m/s})$　（NEWTON の音速）

となり実測値よりかなり小さい．後に LAPLACE および POISSON [2] は気体中を音波の疎密波が伝わる場合には断熱変化であろうと想像した．事実数十以上数千サイクルの振動数で気体が圧縮または膨脹する場合には，圧縮時に瞬間的に温度が上昇し稀薄時に低下する温度変化は，熱伝導によっても熱輻射によっても周囲の気体に伝達する時間的の余裕がない．全く断熱変化をしているものと考えられる．しかもこのような急速な変化は温度計のような熱容量の大きなものを用いたのでは時間平均値か指示せず，瞬時値は測ることができない．断熱変化と仮定し

(18)　$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

とおくと（9）より

(19)　$\kappa = \gamma p_0$

を得る．よって伝播速度は

(20)　$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$　$(\mathrm{m/s})$　（LAPLACE の音速）

となる．ここで $\gamma = 1.41$ とおくと，0°C の場合に

(21)　$c = 332$　$(\mathrm{m/s})$

となり実測値とよく一致することが確かめられた．

音速は気体の温度によって変化する．3･1 の（6）にて，擾乱のないときの値に 0 を附して示すと

(22)　$$\frac{p_0}{\rho_0} = R\theta_0$$

を得るから，（20）より

(23)　$$c = \sqrt{\gamma R\theta_0}$$　$(\mathrm{m/s})$

を得，音速は気体の温度の平方根に比例して増大する．[3]

（11）の $c$ の値は $\kappa$ の値を適当にとれば液体内の音速の式にも用いられる．液体内では等温変化と断熱変化との相異は無視して差支なく，水に対する値を求めてみると 15°C において

(24)　$\kappa = 2.22 \times 10^9$，　$\rho_0 = 10^3$　(SI)

であり，音速は

（2）　約1807年頃またはそれ以前．
（3）　4･7･3参照．

(25)　$c = 1490$　(m/s)

となる．これに対する実測値は COLLADOM と STRUM が 1826 年 Lake of Geneva で行って得た

(26)　$c = 1435$　(m/s)　at 8°C

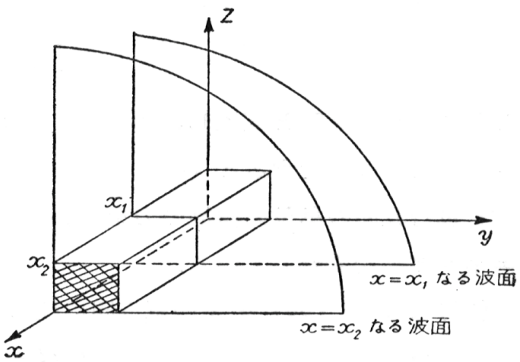
である．

### 3･2･3　エ ネ ル ギ ー

$x$ 方向に伝播する平面波の波頭面上の単位面積を底とし，$x$ 軸と平行な軸を有する筒の内部の $x_1$ と $x_2$ との区間に含まれる媒質の有する運動のエネルギーは

(27)　$T = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{x_1}^{x_2} \dot{\xi}^2 dx$　(J/m²)

で与えられる (第3・6図)．この式で積分限界を音波の存在する全領域に拡げ，音波の存在する波面の面積を $S$ とし，$x_1$ から $x_2$ までの区間の媒質が振動しているものとすれば



第3･6図

(28)　$T = \frac{1}{2}\rho_0 S \int_{x_1}^{x_2} \dot{\xi}^2 dx$　(J)

は媒質が音波によって与えられた全運動エネルギーである．また (27) は $x_1$ と $x_2$ との距離を単位長にとれば単位体積内の運動エネルギーを与える．これとは別に

(29)　$\frac{1}{2}\rho_0 \dot{\xi}^2$　(J/m³)

は波面 ($x$) 上の運動のエネルギーの体積密度を表わしている．これをエネルギー密度 (1) と呼ぶ．

ポテンシャルエネルギーを求めるには，単位質量の媒質が微小の膨脹をしたときになす仕事量を第二近似まで記述した3・1の (26) 式

(30)　$w = p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 - v)$　(J/kg)

から出発する．$w$ の第一項は媒質が局部的に膨脹しても全質量にわたる体積変化がない場合には消滅し

(31)　$\sum p_0(v_0 - v) = 0$

であり，第二項は充分の近似度をもって

(32)　$p - p_0 = \kappa s$　(Pa)，

(33)　$v_0 - v = v_0 s$　(m³)

とおくことができる．よって (30) は

(1)　energy density

(34)
$$w = \frac{1}{2} v_0 \kappa s^2 \qquad (\mathrm{J/kg})$$

となり，これを媒質の全質量について加算すれば

(35)
$$w' = \frac{1}{2}\int^x v_0 \kappa s^2 \rho_0 \, dx ,$$

さらに３・１の（2）を用いれば

(36)
$$w' = \frac{1}{2}\kappa \int^x s^2 dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0 c^2}\int^x (\delta p)^2 dx \qquad (\mathrm{J/m^2})$$

となる．断熱膨張と仮定し，$\kappa = \gamma p_0$ とおくと（36）はポテンシャルエネルギー $V$ と等しくなるが，等温膨張の仮定をすると（36）は熱力学でいう”自由エネルギ－”を表わす．なお（32）の媒質を包む表面の単位面積毎の力を表わしているから（36）の $w'$ も波面の単位面積を底とする筒の中のエネルギーを表わしている．

（27）および（36）を $x$ の正方向に進む平面波について計算するには（12）より求めた

(37)
$$\xi = f(ct - x) \qquad (\mathrm{m}),$$

(38)
$$\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial t} = c f(ct - x) = -c\frac{\partial \xi}{\partial x} = +cs \qquad (\mathrm{m/s})$$

なる関係を用いればよく，その結果全エネルギーは

(39)
$$E = T + V = 2T = 2V \qquad (\mathrm{J/m^2})$$

となり，全エネルギーの半分は運動のエネルギー，半分はポテンシャルエネルギーであることか示される．なお（38）より粒子速度 $\dot{\xi}$ と凝縮 $s$ とは同符号であることが示されている．すなわち粒子が音波の進行方向に走るときはその点の密度が増加し，逆方向に走るときは密度は小さくなる．

音響の問題としては，単絃振動波が引続いて進行してくる場合が最も重要である．[2] この場合には $x$ 点の変位は

(40)
$$\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (\mathrm{m})$$

で表わされ，$a$は振幅，$\omega / 2\pi$は振動数であり，その波長は

(41)
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad (\mathrm{m})$$

である．この場合の運動のエネルギーの瞬時値は

(42)
$$T = \frac{1}{2}\rho_0 a^2 \omega^2 \int^x \sin^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\rho_0 \omega^2 a^2 \int^x \left\{1 - \cos 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} dx \qquad (\mathrm{J/m^3})$$

となり，第二項は２倍の振動数で交番するエネルギーであるが，１周期間にわたって平均すると消滅し，運動のエネルギーの時間平均値は単位体積あたり

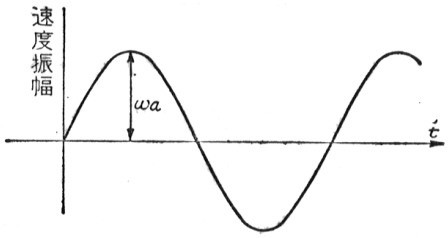
（2）　train of simple harmonic wave，単絃振動波の系列または持続せる単絃振動音波．

(43)　$$\overline{T} = \frac{1}{4}\rho_0 \omega^2 a^2 \qquad (\mathrm{J/m^3})$$

となる．これはエネルギー密度の時間平均値であり，ポテンシャルエネルギーから求めても同一結果となる．よってこの場合の全エネルギーの時間平均値は

(44)　$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 a^2 \qquad (\mathrm{J/m^3})$$

である．(44) の $\omega^2 a^2$ は，(40) より明らかなように，粒子速度 $\dot{\xi}$ の振幅（の尖頭値）である．よって一連の正弦波を正確に幾波長が含む空間内の全エネルギーの体積密度の時間平均値は，そこに含まれている媒質が振動速度の尖頭値 $\omega a$ なる速度で走ったときの運動エネルギーに等しいことが (44) で示されている．



第3・7図

また凝縮 $s$ の振幅（の尖頭値）を $s_m$ とすると（38）と（40）より

(45)　$$\dot{\xi} = \omega a \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = c s,$$

(46)　$$s = s_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

と書け

(47)　$$\omega a = c s_m$$

となるので，(44) を $s_m$ で表わすと

(48)　$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_0 c^2 s_m^{\ 2} \qquad (\mathrm{J/m^3})$$

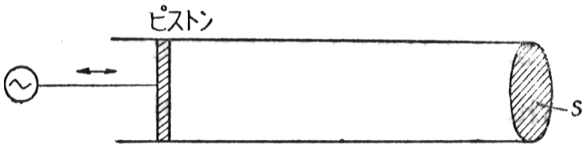
とも書ける．(11) を導く過程において $s$ または $-\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ の二次の微少量を省いてきたので（48）は

(49)　$$s_m = \frac{2\pi a}{\lambda} << 1$$

の範囲でのみ正しいことになり，その範囲は粒子の変位にして

(50)　$$a << \frac{\lambda}{2\pi} \qquad (\mathrm{m})$$

である．



第3･8図

次に平面波の波頭面の単位面積を貫いて流れるエネルギー流を求めよう．それには $S$ なる断面積を有する筒を考え，その中の空気が一端にあるピストンで振動させられる場合について考察してみる．第３・８図にてピストンの運動が

(51)　$$\xi_0 = a\cos\omega t$$

である場合には，これから $x$ の正の側にある空気は

(52)　$$\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

なる変位をすると考えられる．この場合ピストンが空気に対してなす仕事量は毎秒

(53)
$$W = pS\dot{\xi}_0 = (p_0 + \kappa s)S\dot{\xi}_0$$
$$= -p_0\omega\, Sa\sin\omega t + \frac{\kappa\omega^2 a^2}{c} S\sin^2\omega t \qquad (\mathrm{J/s}) \qquad \text{または} \qquad (\mathrm{W})$$

であり，時間平均値をとると第一項は消滅し

(54)
$$\overline{W} = \frac{1}{2}\kappa\omega^2 a^2 \frac{1}{c} S = \frac{1}{2}\rho_0 cS\omega^2 a^2 \qquad (\mathrm{W})$$

となる．この値は，(44) と比較すると分るように，$cS$ なる体積内に含まれている音波のエネルギーに等しく，これだけのエネルギーが毎秒ピストンから空気に注ぎ込まれている．しかし一方音波は毎秒 $c$ だけの距離を伝播するので，波頭面は毎秒 $c$ だけ前進し，毎秒 $cS$ なる体積内の空気は静止していたものが新たに振動させられる．このようにして音波の波頭面は (54) に示す割合でエネルギーを伝播させて行く．これをエネルギー束またはエネルギー流 (3) と呼ぶ．よって波頭面の単位面積が運ぶエネルギーは毎秒

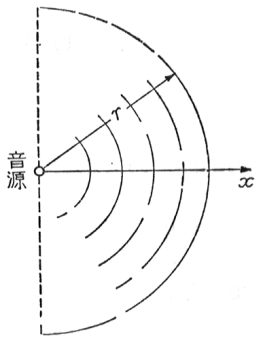
(55)
$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho_0 c\omega^2 a^2 = \frac{1}{2}\rho_0 c^3 s_m^{\ 2} = \frac{1}{2}\frac{(\delta p)^2}{\rho_0 c} \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

である．これをエネルギー流密度 (4) と呼ぶ．

(55) を用いて音源からの輻射エネルギーを計算することができる．音源から充分はなれた点において波面がほとんど平面波とみなし得る場合には，波面の単位面積が運ぶエネルギーは (55) で示され，この値は音源からの距離 $r$ を半径とする球面上のすべての点の単位面積について等しい値をとる．いま，$+x$ 方向へ進む平面波の波面が第3・9 図に示す音源の位値を通り $x$ 軸に直角な平面で切った半球上の音場を表わすものと考えると，この半球上での全エネルギー流の時間平均値は

(56)
$$\overline{W} = \frac{1}{2}\rho_0 c^3 s_m^{\ 2} 2\pi r^2 = \pi\rho_0 c^3 r^2 s_m^{\ 2} = \pi r^2 \frac{(\delta p)^2}{\rho_0 c} \qquad (\mathrm{W})$$

となる．これは音源から単位時間に輻射される全エネルギーであると考えられ，これを音源の音響出力と呼ぶ．



第3・9図

(56)を用いて耳で聞き得る最弱音に相当する凝縮の大きさを測定する実験が行われた．それは音源からの輻射エネルギー $\overline{W}$を一定に保ち，人が次第に音源から遠ざかり，遂に音の聞こえなくなった距離 $r_0$ を測定すると，その点の凝縮の振幅の最大値は (56) より

(3)　energy flux or sound power, cgs 単位系の(erg/s)は仕事をする速度，またはエネルギーを消費する速度である．国際単位系では (J/s)がこれに相当し，これを watt と呼ぶ．
(4)　energy flux density.
(5)　Load RAYLEIGH:"Proceeding of Royal Society" Vol.26, P.248, 1877.

(57)
$$s_m = \sqrt{\frac{W}{\pi c^3 \rho_0}}\,\frac{1}{r_0}, \qquad \delta p = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\rho_0 c W}{\pi}}$$

である筈であり，またその点の粒子の変位の振幅は（47）より

(58)
$$a = \sqrt{\frac{W}{\pi c \rho_0 \omega^2}}\,\frac{1}{r_0} \qquad (\mathrm{m})$$

となる．音源に笛を用い，笛に流入する空気のエネルギー流を $W$ とし上記の実験を行った結果，人の聞き得る最も弱い音は

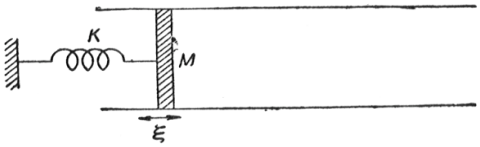
(59)
$$s_m < 4\times 10^{-8}, \qquad a = \frac{c s_m}{\omega} < 8\times 10^{-10} \qquad (\mathrm{m})$$

であることが判明した.[6] しかしこの実験では笛を鳴らすために送りこんだ空気の持つエネルギーが全部音のエネルギーとなって発せられたものと仮定しているため，実際に発せられた音のエネルギーはもっと小さい筈である．よって不等号がつけられている．後に正確な実験が行われ

(60)
$$s_m = 6\times 10^{-9}$$

であることが確められた.[7]

前に筒の中のピストンが空気に対してエネルギーを注ぎ込むといったが，音源が媒質を駆動する場合のエネルギーの移行を説明するよい模型がこのピストンによって示される．ピストンをバネに結合して筒の中で自由振動ができるようにしておく．空気がない場合のピストンの自由振動数が $\omega_0/2\pi$ であったとすると，空気のある場合の運動の方程式は，$M$ をピストンの質量とし $\xi$ をその変位とすれば



第3・10図

(61)
$$M(\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi) = -(p - p_0)S$$

とかける．ここで空気の圧力はその音圧による変化分のみが問題となり，一定分 $p_0$ は大気圧に対して平衡の位置を定めることにのみ関係する．音圧による変化分は

(62)
$$p - p_0 = \kappa s = \frac{\kappa \dot{\xi}}{c} = \rho_0 c \dot{\xi}$$

とかけるので（61）は

(63)
$$\ddot{\xi} + \frac{\rho_0 c S}{M}\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$$

となり，この解は

(64)
$$\xi = C e^{-\frac{k}{2}t}\cos(\omega' t - \varphi) \qquad (\mathrm{m}),$$
$$k = \frac{\rho_0 c S}{M}, \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4}}$$

---

（6）　$p - p_0 = \gamma p_0 s = 1.41\times 10^5 s\ (\mathrm{N/m^2}) = 1.41\times 10^5 s\ (\mu\mathrm{bar})$

（7）　最低可聴限界については FLETCHER(1922) の実験がある．これは第Ⅱ編を参照されたい．　H.FLETCHER and R.L.WEGEL:“The Frequency sensitivity of Normal Ears” Phys.Rev.June 1922. H.FLETCHER: “Speech and Hearing” New York,1929.

となる．したがってもしもピストンが自由に振動している場合にはその振動は空気中に音波として輻射されるエネルギーだけの損失を生ずるので $e^{-\frac{t}{\tau}}$ にしたがって減衰し，かつその振動数も空気の反作用のために $\omega'$ となる．したがって振動を持続させるためには輻射エネルギーに等しいエネルギーを外から絶えず注ぎ込んでやる必要があり，その値は（54）で与えられる．またピストンが $\omega_0$ なる角周波数で振動をするためには，

(65)
$$2M >> \frac{\rho_0 \lambda S}{2\pi}$$

である必要がある．[8]　ここに $\lambda$ は音波の波長である．よって音波の一波長内に含まれる空気の質量と比較して充分大きな質量のピストンを用いれば，ピストンの固有振動数の音波を輻射させることができ，またその振動を持続させるためには特別の振動源を用いてピストンに絶えず輻射エネルギーを補給してやる必要があるということが明白となる．

### 3・2・4　反　射

平面音波がある条件の下では反射波を生ずるであろうということは3・2・1の（12）が絃振動の解と同一の形であることから容易に類推される．しかし絃の上の波動が完全な一次元の波動（線上を伝わる波動）であったのに反し，音波は，その運動の方程式が一次元の波動方程式の形を取る場合でも，本質的に三次元の空間内を伝わる波動であるから，反射の問題は必然的に複雑性を増す．これらの内でごく基本的な問題のみをここで示し，他は第四章で説明することとする．

絃の一端固定に対応する形は，原点 $(x=0)$ で変位を生じない形であるから，平面音波に対しては原点で $x$軸に垂直な無限に広い固定壁のある場合となる．いま $x=0$ に固定壁があり，$x<0$ の範囲にのみ媒質があると仮定すると，境界条件は $x=0$ にて $\xi=0$ でなければならぬから，（12）は

(66)
$$\xi = f(ct-x) - f(ct+x)$$

となり，粒子速度 $\dot{\xi}$ および凝縮 $s$ は

(67)
$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = cf'(ct-x) - cf'(ct+x),$$

(68)
$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = +f'(ct-x) + f'(ct+x)$$

となる．ここに $f'(u)$ は $f$ の $u$ に関する微係数である．この結果変位 $\xi$ および粒子速度 $\dot{\xi}$ は反射されると符号が逆転するが，凝縮 $s$ および音圧 $\delta p$ は同符号のままであることが示される（第3・11図）．

次に絃には見られなかった形で音波には実現し得る境界条件として，原点を含む平面上で音圧が不変に保たれる場合が考えられる．このような条件は空気を満した管の開放端の境界条件としてよく用いられるものである．つまり

（8）　ピストンの両面に音波を輻射していると考えられる場合には（65）$2M$ の係数2は不用である．

(69)　　$x = 0$　　にて　　$s = -\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

と表わされる場合であって，凝縮は生じないが変位は全く自由に生じ得る状態である．この場合には(12) は $x = 0$ にて

(70)　　$F'(ct) = f'(ct)$

となり，これにより $F$ の形は

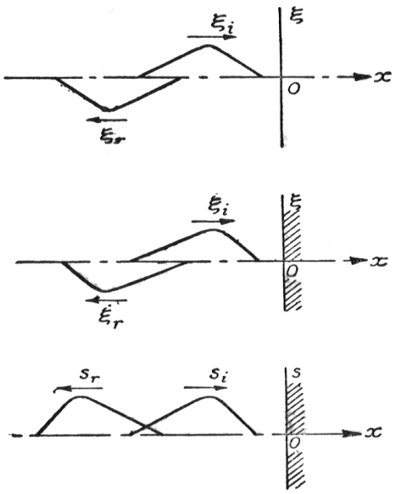
(71)　　$F(ct) = f(ct) + C$

でなければならぬ．つまり $F$ は $f$ と定数 $C$ だけ異なる形を取ることが必要である．しかしこの定数Cは媒質の全質量に共通な値（全体の流れのような変位）であって，音波の場合には考慮する必要はなく，結局音場は

(72)　　$\xi = f(ct - x) + f(ct + x)$,

(73)　　$\dot{\xi} = c f'(ct - x) + c f'(ct + x)$,

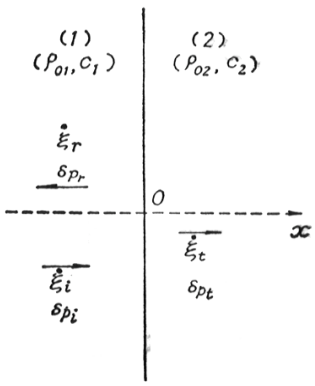
(74)　　$s = f'(ct - x) - f(ct + x)$



第3·11図

と表わされ，$\xi$ と $\dot{\xi}$ は反射されても符号が変ぜず，$s$ のみが符号を変ずることになる．実際に凝縮 $s$ が少しも生ぜずに変位 $\xi$のみが生ずるような境界は実現することはできないが，前にも述べたように管の開放端とかまたは水のように密度の大きな媒質内の音波が空気のような密度の小さい媒質との接触面で反射される場合などには，この仮定がかなり高い近似度で現象と合致することが確かめられている．

以上二つの場合はいずれも境界面で完全反射をする場合であるが，一つの平面を境として２種類の媒質が接している場合には，一方の媒質内を伝播してきた音波はこの境界面で一部は反射され，一部は透過して他の媒質内へ侵入してゆくのが普通である．このような場合の最も簡単な例として，$x = 0$ なる平面の左側に媒質（1）があり，右側には媒質（2）があるとき，平面波が（1）内を $+x$ 軸方向（境界面に垂直）に入射する場合の音場の解析を示しておく．



第3·12図

煤質（1）内を $x$ の正方向に進行する入射波成分の粒子速度および音圧を $\dot{\xi}_i$ および $\delta p_i$，境界面 $x = 0$ で反射されて $x$ の負方向に進行する反射波成分のそれを $\dot{\xi}_r$ と $\delta p_r$ 境界面を透過し媒質（2）内を $x$ の方向に進行する透過波成分のそれを $\dot{\xi}_t$ と $\delta p_t$ で表わすことにすれば，境界面の両側における粒子速度および圧力は常に相等しくなければならぬから，両媒質の平衡圧力 $p_0$ は相等しいものと仮定して，境界条件を書くと

(75)　　$\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_r = \dot{\xi}_t$,　　$(x = 0)$

(76)　　$\delta p_i + \delta p_r = \delta p_t$　　$(x = 0)$

が成立する必要がある．しかるに各進行波成分の間には（38）のように

(77)　$$\delta p_i = \rho_{01} c_1 \dot{\xi}_1 \ , \qquad \delta p_r = -\rho_{01} c_1 \dot{\xi}_r \ , \qquad \delta p_t = \rho_{02} c_2 \dot{\xi}_t$$

なる関係があるから，(75) と (76) とから $\dot{\xi}$ または $\delta p$ が消去されて各進行波成分の間に

(78)　$$\begin{cases} \rho_{02} c_2 (\delta p_i - \delta p_r) = \rho_{01} c_1 \delta p_t \ , \\ \delta p_i + \delta p_r = \delta p_t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\xi}_i + \dot{\xi}_r = \dot{\xi}_t \ , \\ \rho_{01} c_1 (\dot{\xi}_i - \dot{\xi}_r) = \rho_{02} c_2 \dot{\xi}_t \end{cases}$$

なる関係が得られる．これより反射波と入射波との関係として

(79)　$$\delta p_r = \frac{\rho_{02} c_2 - \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \delta p_i \ , \qquad \dot{\xi}_r = -\frac{\rho_{02} c_2 - \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \dot{\xi}_i \ ,$$

また透過波と入射波との関係として

(80)　$$\delta p_t = \frac{2 \rho_{02} c_2}{\rho_{02} c_2 + \rho_{02} c_1} \delta p_i \ , \qquad \dot{\xi}_t = \frac{2 \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \dot{\xi}_i$$

を得る．(79) より求めた

(81)　$$R_{12} = \frac{\delta p_r}{\delta p_i} = \frac{\rho_{02} c_2 - \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \ , \qquad (\text{数値})$$

$$R_{12}' = \frac{\dot{\xi}_r}{\dot{\xi}_i} \cancel{= -R_{12}}$$

は入射波の振幅の何パーセントが反射波となるかを示す係数であり，これをそれぞれ音圧および粒子速度の反射係数 [1] と呼ぶ．同様に (80) より透過係数 [2] を求めると

(82)　$$T_{12} = \frac{\delta p_t}{\delta p_i} = \frac{2 \rho_{02} c_2}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \ , \qquad (\text{数値})$$

$$T_{12}' = \frac{2 \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} \ .$$

なお添字 1，2 は (1) から (2) へ向う境界面における反射および透過を意味する．逆に (2) から (1) へ向って入射する場合には反射係数は符号が逆となるたけで大きさには変りなく，透過係数の値が変化し

(83)　$$R_{21} = -R_{12} = \frac{\rho_{01} c_1 - \rho_{02} c_2}{\rho_{01} c_1 + \rho_{02} c_2} \ ,$$

(84)　$$T_{21} = \frac{2 \rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2 + \rho_{01} c_1} = \frac{\rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2} T_{12} \ .$$

次に入射波，反射波，透過波のエネルギー流密度をそれぞれ $w_i, w_r, w_t$ と書くと (55) より

(85)　$$2w_i = \delta p_i \dot{\xi}_i \ , \qquad 2w_r = \delta p_r \dot{\xi}_r \ , \qquad 2w_t = \delta p_t \dot{\xi}_t$$

と表わせるが，これに (79) (80) を代入してみると，エネルギー保存則

(1)　reflection coefficient.
(2)　transmission coefficient.

t

(86)　　$w_t = w_r + w_i$

が保たれていることが分る．すなわち

(87)　　$$R_{12}^{\ 2} + \frac{\rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2} T_{12}^{\ 2} = 1$$

が恒等的に成立する．これより，反射波のエネルギー束は $R_{12}^{\ 2}$，透過波のエネルギー束は，$\frac{\rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2} T_{12}^{\ 2}$ の割合であることが分る．これを音の反射係数および透過係数と呼ぶ．[3]

(2) が固定壁である場合には，$\rho_{02} c_2 >> \rho_{01} c_1$ と考えられ，(81) と (82) は

(88)　　$R_{12} = +1$,　　$T_{12} =$ 不定

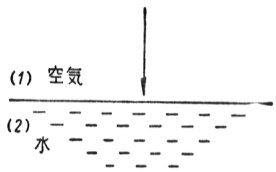
となる．この場合の $T_{12}$ は (87) より求めれば 0 となるべきであり，最初に示した完全反射の結果と一致する．また媒質 (2) が，圧縮を生じない場合には $\rho_{02} c_2 << \rho_{01} c_1$ に相当し，(81) と (82) は

(89)　　$R_{12} = -1$,　　$T_{12} = 0$

となり，これも最初の完全反射の結果と一致する．

例として空気より水へ向って平面音波が垂直に入射する場合の反射係数と透過係数とを求めてみる．空気を (1)，水を (2) とすれば

(90)　　$$\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} = 0.00129,\quad \frac{c_1}{c_2} = 0.222,\quad \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^3 \approx 0.019$$




第３・１３図

であるから

(91)　　$R_{12} = 0.99943$,　　$R_{21} = -0.99943$,

$R_{12}^{\ 2} = 0.9988$,

(92)　　$$\frac{\rho_{01} c_1}{\rho_{02} c_2} T_{12}^{\ 2} = 0.0012,\qquad \frac{\rho_{02} c_2}{\rho_{01} c_1} T_{21}^{\ 2} = 0.0012$$

となり，空気と水の境界面では音がどちらの面側から入射しても音のエネルギーはほとんど全反射をする．この場合 $T_{12}$ または $T_{21}$ を計算すると非常に小さい値または非常に大きな値となるが，これは非圧縮性流体に近い水と充分な圧縮性を持つ空気との間の凝縮の伝達の度合を表わしている．なお水から空気に向う場合の反射条件は境界面の圧力が完全に不変である場合と非常に近いことが分る．

平面状境界面に斜めに平面波が入射する場合は GREEN (1847) により解かれているのでその結果のみを示す．[4] 音波の進行方向 $\xi$ と境界面の法線 $z$ とのなす角を $\theta$ とすると，入射角 $\theta_i$，反射角 $\theta_r$，透

---

(3)　凝縮，粒子速度，変位のそれぞれについて反射係数および透過係数の形が求められる．しかしエネルギー流の反射および透過係数が本質的のものである．なお4・1を参照 のこと．

(4)　4・1参照．

過角 $\theta_t$ の間には [5]

$$\theta_i = \theta_r \ ,$$

(93)　$$\sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2}\sin\theta_i$$

なる関係があり，かつ境界面上の法線方向速度の連続条件は　$z = 0$ にて

(94)　$$\dot{\xi}_i\cos\theta_i + \dot{\xi}_r\cos\theta_r = \dot{\xi}_t\cos\theta_t \qquad (\mathrm{m/s}),$$

境界面上の圧力の連続条件は　$z = 0$ にて

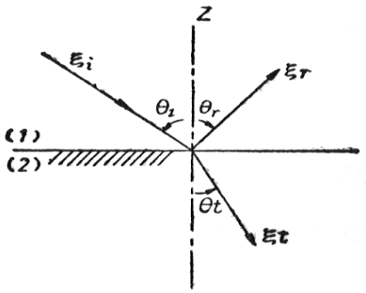
(95)　$$\delta p_i + \delta p_r = \delta p_t \qquad (\mathrm{Pa})$$

と書けるが，ここに

(96)　$$p = p_0 + \delta p = p_0 + \kappa s \qquad (\mathrm{Pa})$$

であるから，

(97)　$$Z_0 = \frac{\delta p}{\dot{\xi}} = \rho_0 c \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$



第3・14図

なる平面音波の音響特性インピーダンス [6] $Z_0$ を導入すると

(98)　$$\delta p_i = Z_{01}\dot{\xi}_i \ , \qquad \delta p_r = -Z_{01}\dot{\xi}_r \ , \qquad \delta p_t = Z_{02}\dot{\xi}_t$$

と書けるので，連続条件（94）と（95）は

(99)　$$\begin{cases} \dot{\xi}_i\cos\theta_i + \dot{\xi}_r\cos\theta_i = \dot{\xi}_t\cos\theta_t \ , \\ Z_{01}\dot{\xi}_i - Z_{01}\dot{\xi}_r = Z_{02}\dot{\xi}_t \ . \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_{02}\cos\theta_i(\delta p_i - \delta p_r) = Z_{01}\cos\theta_t\,\delta p_t \ , \\ \delta p_i + \delta p_r = \delta p_t \ . \end{cases}$$

これより粒子速度および音圧の反射係数と透過係数を求めると

(100)　$$\begin{cases} R_{12}' = \dfrac{\dot{\xi}_r}{\dot{\xi}_i} = \dfrac{Z_{01}\cos\theta_t - Z_{02}\cos\theta_i}{Z_{01}\cos\theta_t + Z_{02}\cos\theta_i} \ , \\ T_{12}' = \dfrac{\dot{\xi}_t}{\dot{\xi}_i} = \dfrac{2Z_{01}\cos\theta_i}{Z_{01}\cos\theta_t + Z_{02}\cos\theta_i} \ . \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{12} = \dfrac{\delta p_r}{\delta p_i} = -R_{12}' \ , \\ T_{12} = \dfrac{\delta p_i}{\delta p_i} = \dfrac{Z_{02}}{Z_{01}}T_{12}' \ . \end{cases}$$

この場合のエネルギー束は

(101)　$$2w_i = \rho_{01}c_{01}\dot{\xi}_1^{\,2} = Z_{01}\dot{\xi}_i^{\,2} \ , \qquad 2w_r = Z_{01}\dot{\xi}_r^{\,2} \ , \qquad 2w_t = Z_{02}\dot{\xi}_t^{\,2}$$

と書けるからエネルギー保存則は

(102)　$$R_{12}'^{\,2} + \frac{Z_{02}}{Z_{10}}T_{12}'^{\,2} = 1$$

となり透過エネルギーは入射エネルギーの　$\dfrac{Z_{02}}{Z_{01}}T_{12}'^{\,2}$　の割合となる．

---

（5）　$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t$ ，　（4・1　参照）．

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi\nu}{c_1} = 2\pi\nu\sqrt{\frac{\rho_{01}}{\kappa_1}}$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 2\pi\nu\sqrt{\frac{\rho_{02}}{\kappa_2}}$$

（6）　3・5・5 参照．

（7）　$\theta_i = 0$ とすれば（81），（82）と一致する．

なお（93）を見ると $k_1 > k_2$ の場合に

$$\frac{k_1}{k_2}\sin\theta_i > 1, \qquad \theta_i > \sin^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \tag{103}$$

となるような入射角 $\theta_i$ で入射した音波は，$\theta_2$ が虚数となるために透過方向が定まらない．このような場合には入射波は媒質（2）内へは侵入せず，全部が反射されて媒質（1）内へ戻るものと考えられ，

$$\theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \tag{104}$$

を全反射臨界角と呼ぶ.[8]

### 3・2・5　空 気 柱 の 振 動

長さに比して太さが比較的細い管の中の空気の振動は棒の中の縦波と似ている．管の中では音波は管の長さの方向にしか進行しないから空気粒子の変位の方向も管の長さの方向であり，管の太さが余り太くなければ，その変位は管の断面上では何処も皆同一の値であるとみなすことができよう．このような場合には管内には長さの方向に平面波が進行すると仮定して解くことができ，その解析は絃の上の波動の伝播と全く同じ形となる．したがって長い管の中を任意の波形の音波が球面波的の拡散減衰をせずに自由に伝播し得る．これが伝声管の原理である．

管の長さが余り長くないものは古くから楽器として広く用いられている.[1]　これは恰も固定絃のような性質を有し，発する音の高さ（振動数）は管の長さによって定められる．したがって有限の長さの空気柱は，その端が開いている場合でも，この終端の断面で完全反射に近い状態が生じているものと予想される．D. BERNOULLI，EULER，LAGRANGE 等は管の開口端の条件を圧力変化を生じない完全反射面と仮定して空気柱の規準振動を求めた.[2]　その結果は，かなり正確に実際の現象と一致することが確かめられているが，事実は管の開口端からは音波が輻射され，球面波に近い形で周囲の空間に伝播してゆく．これは終端面で凝縮 $s$ が完全に零でないために完全反射が生ぜず，その結果音のエネルギーが管外に漏洩するためであって上記の仮定とは根本的に相容れない現象である．このような欠点のあるために，上記のような仮定のもとに解いて求めた管の固有振動数と長さとの関係は，事実上わずかの相違を生じ，長い間疑問として残されていた.[3]

開口端で完全反射が生じているとすれば，エネルギーはこの面から少しも外に出ないから一度発した音は永久に管内に存続する筈である．しかし事実はそうでなく，ある時間の後には消滅してしまう．しかし開口端では完全反射に近い現象が生じているので，音が消滅するまでの時間はその音の数百周

---

（8）　critical angle of total reflection

（1）　笛，ラッパ等管楽器呼ばれるものおよびオルガン．

（2）　終端面上で $s = 0$ と仮定すること．

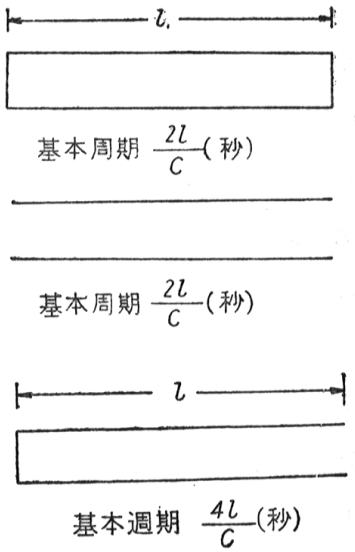
（3）　この問題はオルガンの管の長さを設計して決定するために必要であったが，どうしても理論的に決定できず，大体の管長を定めておき，仕上げるときに耳で聞きながら管をけずって調律していた．開口端の補正については 4･6･6 および第Ⅱ編1･3･2参照.

期の長さに相当し，音波は発せられてから消滅するまでに管内をかなりの回数往復する．したがって開口端が完全反射をするという仮定もかなりの近似度をもって成立することになる．よってここではこの近似的仮定が成立するものとして規準振動姿態を求める方法を述べる．

両端固定絃に相当する一つの場合は管の両端閉鎖の場合である．この場合には管内の一点から発して両方向へ進行した音波は閉鎖瑞で完全反射される．その反射波がもとの位置まで戻ってきても，この時の音波形は粒子速度 $\dot{\xi}$ の符号が逆転しているから初めの状態とは異なっている．この波がさらに進行してもう一方の閉鎖端で反射されると，ここでも凝縮 $s$ の符号は不変で，$\dot{\xi}$ のみが符号を変えるので，$\dot{\xi}$ の符号は２度逆転してもとに戻り，この波が出発点に戻ってきたときには，完全に最初の状態にもどる．よって音が管内を１往復する時間 $\frac{2l}{c}$（$l$ は管の長さ）だけ経過すると管内の様子は最初の状態に戻ることになり，この管は $\frac{2l}{c}$ を周期とする振動をすることになる（第3･15図）

両端を開放した管について同様に考えてみると,終端における反射波は $s$ の符号を逆転し，$\dot{\xi}$ の符号は変らないからこの場合も音波が管内を１往復すれば最初の状態に戻ることになり，基本周期は $\frac{2l}{c}$ である．

しかし管の一端を閉じ一端のみを開いた場合を考えて見ると，開放端においては反射波の $s$ の符号が逆転し $\dot{\xi}$ は不変であるが，閉鎖端では $s$ が不変で $\dot{\xi}$ が負となるため，音波が１往復して最初の位置に戻って来ても $(-s, \dot{\xi})$ となっていて最初の状態に戻らず，結局２往復しなければ初めの状態に戻らない．よって一方が開き，他が閉じた管の基本周期は $\frac{4l}{c}$ となる．このような管を Stopped Pipe と呼びその基本振動数は両端開放管より１オクターブ低くなる．[4]



第３・１５図

空気柱の規準振動姿態を求めることは絃の場合と全く同様であり，平面波の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \tag{105}$$

において振動解を求めるために

$$\xi = \cos(\omega t - \varphi) \tag{106}$$

と仮定すると，一般解は

$$\xi = \left( A \cos\frac{\omega}{c} x + B \sin\frac{\omega}{c} x \right) \cos(\omega t - \varphi) \tag{107}$$

となり，(107) の音波の波長は

（4）　オルガンでは同一の管の端を開いたり閉じたりすることにより１オククーブ高くしたり低くしたりすることができる．

(108)　$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (\mathrm{m})$$

であるから，波動の節は半波長 $\frac{\lambda}{2}$ ごとに存在し，腹はその中間に存在するような定在波振動が生じ得ることが予想される．

両端を閉じた管の場合には，境界条件として

$$x = 0 \quad \text{および} \quad x = l \quad \text{にて} \quad \xi = 0$$

を満足せねばならぬから（107）より

(109)　$$A = 0, \quad \sin\frac{\omega l}{c} = 0$$

なることを必要とし，第 $n$ 次倍音の振動姿態は

(110)　$$\xi_n = C_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \cos\left(\frac{n\pi ct}{l} - \varphi_n\right), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．これの低次姿態は第3･16図に示してある．

両端が開いている場合には

$$x = 0 \quad \text{および} \quad x = l \quad \text{にて}$$
$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

を満足する必要があり，この場合には

(112)　$$B = 0, \quad \sin\frac{\omega l}{c} = 0$$

なることを要し，解は

(113)　$$\xi_n = C_n \cos\frac{n\pi x}{l} \cdot \cos\left(\frac{n\pi ct}{l} - \varphi_n\right), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる (第3・17図)．

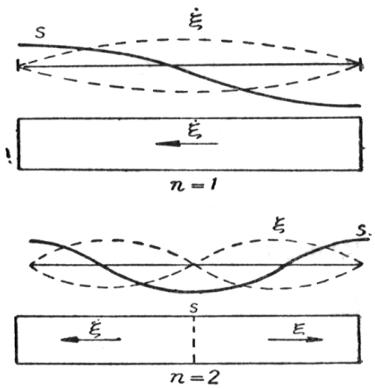
一端開放，一端閉鎖のいわゆる Stopped pipe の場合には

(114)　$$x = 0 \quad (\text{閉}) \quad \text{で} \quad \xi = 0,$$
$$x = l \quad (\text{閉}) \quad \text{で} \quad -\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

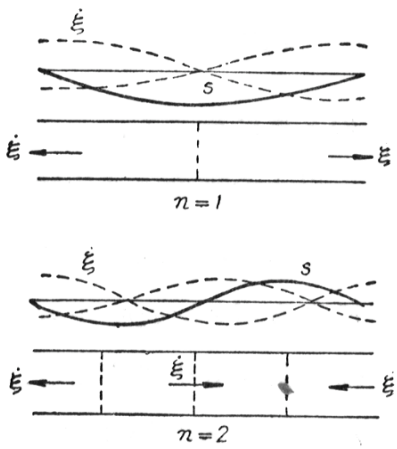
なることを要し，その結果

(115)　$$A = 0, \quad \cos\frac{\omega l}{c} = 0$$

なることを必要とする．よって解は



第3・16図　両端閉鎖管．



第3・17図　両端開放管．

(116)
$$\xi_m = C_m \sin\frac{m\pi x}{2l} \cdot \cos\left(\frac{m\pi ct}{2l} - \varphi_m\right)$$
$$(m = 1, 3, 5, \cdots)$$

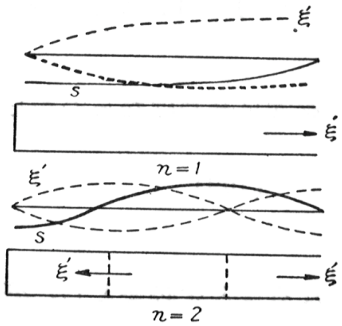
となる．この解の顕著な特長は偶数倍音の現われないことである．よって Stopped pipe の出す音には偶数倍音が含まれず，特有の音色を有することが明らかとされる．

空気柱は上記のような規準振動姿態を有するので，いよいよ共鳴器として利用される．そのような場合には，外部の音場によって一定の振動数で強制される状態となる．一端を閉じ，他端を開いた管の開放端 $x = 0$ を外部音場により

(117)
$$\xi = A\cos(pt - \varphi)$$

なる形で強制したとすると，管内に成立すべき定常状態の振動姿態は

(118)
$$\xi = \frac{A}{\sin\frac{pl}{c}} \cdot \sin\frac{p(l-x)}{c} \cdot \cos(pt - \varphi)$$



第3・18図　一端開放，一端閉鎖管．

となる．よって

(119)
$$\sin\frac{pl}{c} = 0, \qquad l = \frac{m\pi c}{p} = \frac{m\lambda}{2}$$

のときに $\xi$ の振幅は著しく増大し，たとえ多少のエネルギー損失が存在しても共鳴現象が現われる．KUNDT(1868) はこの原理を用い，ガラス管の中に細かい砂を巻き，色々の気体の音速を，その節と腹の位置で定まる波長から決定した．なお $x = l$ で開いた管(両端開放)の場合には

(120)
$$\xi = \frac{A}{\cos\frac{pl}{c}} \cdot \cos\frac{p(l-x)}{c} \cdot \cos(pt - \varphi)$$

となり，この場合の共鳴は

(121)
$$\cos\frac{pl}{c} = 0, \qquad l = \frac{(2m+1)\pi c}{2l} = \frac{(2m+1)\lambda}{4}$$

のときに生ずる．

以上の理論は液体柱の振動にも応用できる．ただこの場合には管壁を完全な剛体とみなすことが困難となる．実際に液体の振動に対しては管壁も柔軟なものと考えねばならず，液体内のヒズミ $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ によるポテンシャルエネルギーは，壁が剛体である場合より小さくなる．したがって液体中の音の伝播速度 $c$ も小さくなる．この事実は WERTHEIM(1847) が発見し，HELMHOLTZ(1848) が説明したがさらに KORTHWEG(1847),LAMB 等によっても研究されている．

その結果によると，ガラスや鋼のような固体内の弾性波の伝播速度は水中音波に比してはるかに速いから，管内の応力変化にしたがって管壁の変形は急速に順応し得る．よって壁の変形は液体内の圧力の瞬時分布に応じた静力学的の形であると考えられる.この仮定にもとづいて管内の水中音速の変

化を求めてみると，音速の理論値を $c_0$ ，壁の厚さを $h$, 管内の実際の音速を $c$ とするとき，$c$ は

(122)
$$c^2 = \frac{c_0^{\ 2}}{1+\dfrac{2\kappa a}{hE}}$$

で与えられる．ここに $a$ は管の半径，$\kappa$ は液体の体積弾性率，$E$ は壁材料の YOUNG 率である．ガラス管に水を満たした場合には

$$E = 6.03\times 10^{10} \quad (\mathrm{N/m^2}) \quad (\text{ガラス})$$
$$\kappa = 2.22\times 10^{9} \quad (\text{〃}) \quad (\text{水})$$

であるから $h/a = 0.1$ の場合には

$$c = 0.759\ c_0$$

となる．また厚さが非常に厚い場合には極限値として

(123)
$$\frac{c^2}{c_0^{\ 2}} = \frac{\mu}{\kappa+\mu},$$

ただし $\mu$ は壁材料のコワサ，$\kappa$ は液体の体積弾性率である．ガラスの $\mu$ は水の $\kappa$ に比して 10 倍位大きいから厚いガラスを用いると $c$ は $c_0$ より約 5 % 小さくなる．

## 3・3　流 体 理 論

大気中または任意の気体および液体内の音波の性質は，波面が平面であると仮定することによって一応明らかにされた．しかし，さらに詳細に音波の性質を吟味する場合には，平面波の仮定はもはや成立し得なくなるのが普通である．音源や障碍物を含んだ空間内の音波の性質を知るためには流体理論から出発した音波の一般式を基礎にしなければならない．その順序として，まず流体理論の要点から説明する．

### 3・3・1　流体粒子の加速度

流体がある速度で流れている場合には，その流速は液体の位置（$x, y, z$）によって異なる値を取るのが普通であるが，この速度の分布の形状は時間の経過によっても変遷する．したがって速度 $\mathbf{V}$ は座標 $x\,y\,z$ と時間 $t$ との函数である．ここに $\mathbf{V}$ は速度の大きさおよび方向を表わすベクトル量であり，その座標成分を $u\,v\,w$ ~~の~~とする．

このような流体の中にある特定の粒子に着目して，その加速度を計算しようとすると，この粒子は時間の経過にしたがって位置を変えてしまうので単純に扱うわけにはゆかない．すなわち $t = t_1$ の時刻に $P$ 点の速度の $x$ 成分が $u_1$ であったとすると，これからしばらく経った $t_2$ の時刻には $P$ 点の速度は $u_2$ に変化するであろう．しかしこの時刻には，$t$ 時に $P$ にあった粒子は既に $P'$ 点に移っている．しかも $P'$ 点では $t_1$ 時の速度は $u_1'$ ，$t_2$時の速度は $u_2'$であって，$P$ 点の速度とは当然異なっている．

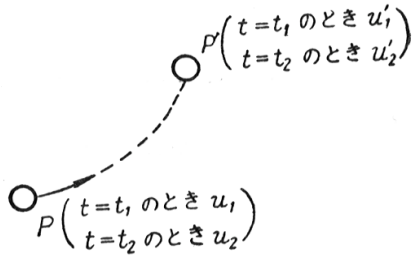
したがってこの粒子は $(t_2-t_1)$ なる時間に速度が $u_1$ から $u_2'$ に変化したことになる．したがって，この粒子の加速度の $x$ 成分は，

（1）
$$\frac{u_2'-u_1}{t_2-t_1}$$

の $(t_2-t_1)\to 0$とせる極限値であると考えねばならぬ．これを変形して

（2）
$$\frac{u_2'-u_1}{t_2-t_1}=\frac{u_2-u_1}{t_2-t_1}+\frac{u_2'-u_2}{t_2-t_1}$$

と書くと，この式の右辺の第一項の極限値は $P$点の加速度



第3･19図

（3）
$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

に等しい．第二項の分子 $u_2'-u_2$は同一時刻 $t_2$ における２点$P$ と $P'$ との速度の差であるから，粒子の通路を $s$ とすれば

（4）
$$u_2'-u_2=\frac{\partial u}{\partial s}\overline{PP'}=\frac{\partial u}{\partial s}V(t_2-t_1)$$

と書ける．ここに $V$ は速度$\mathbf{V}$の大きさを表わすスカラー量である．よって加速度の $x$ 成分は

（5）
$$\alpha_x=\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial s}$$

と表わされる．同様に $y$ 成分および $z$ 成分は

（6）
$$\alpha_y=\frac{\partial v}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial s},\qquad \alpha_z=\frac{\partial w}{\partial t}+V\frac{\partial w}{\partial s}.$$

さらに $s$の方向余弦を $l\ m\ n$ とすれば，

（7）
$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$=l\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}$$

であり，また

（8）
$$u=lV,\qquad v=mV,\qquad w=nV$$

であるから，(5) は

（9）
$$\alpha_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\alpha_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\alpha_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z},$$

またはベクトル表示で

(10)
$$\alpha = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

と書ける．ここに $\frac{d}{dt}$ または $\frac{D}{Dt}$ と記してあるのは

(11)
$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla$$

を示す演算子であり，$\mathbf{i}_x$　$\mathbf{i}_y$　$\mathbf{i}_z$ をそれぞれ $x$　$y$　$z$ 方向の単位ベクトルとすれば，

(12)
$$\nabla = \mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

(13)
$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}_x + v\mathbf{i}_y + w\mathbf{i}_z \quad ,$$

(14)
$$\mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_x = \mathbf{i}_y\cdot\mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z\cdot\mathbf{i}_z = 1 \ ,$$
$$\mathbf{i}_x\cdot\mathbf{i}_y = \mathbf{i}_y\cdot\mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z\cdot\mathbf{i}_x = 0$$

である．よって（10）は

(15)
$$\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}$$

と書くこともできる．(9)（10）または（15）は流体が運動する場合の加速度の一般形である．

運動が非常にゆっくりしている場合には $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ の項に比して他の項は省略できるので，(10）の加速度は $\frac{\partial u}{\partial t}$　$\frac{\partial v}{\partial t}$　$\frac{\partial w}{\partial t}$ のみで充分である．音響の問題において，平面波の変位

(16)
$$\xi = A\cos k(ct - x)$$

に対する $\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t}$ と $\dot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}$ との比を求めてみると

(17)
$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} : \dot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} = 1 : kA$$

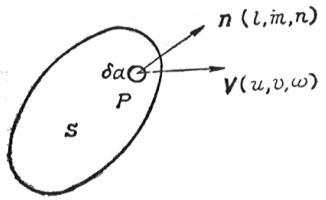
となるので，$kA << 1$ の範囲では加速度は $\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t}$ の項のみで充分なことがわかる．音波の変位の振幅 $A$ が波長 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ に比して

(18)
$$A << \frac{\lambda}{2\pi}$$

であればこの関係が満足されるから，普通の微小振幅音波は常にこのゆっくりした運動の範囲にある．

### 3･3･2　Flux（体積速度）および Divergence（発散）

流体の存在する領域内に一つの幾何学的の面 $S$ を仮想する(第3･20図)．この面は閉じた面でもよいし，また閉じていなくてもよい．この面 $S$ 上の任意の一点 $P$ の周囲に微小面積 $\delta a$ を取り，その法線を $\mathrm{n}(l,m,n)$ とし，この面を通る流体の速度を $\mathbf{V}(u,v,w)$ とすると，



第3・20図

(19)
$$\mathbf{V}\cdot\mathrm{n}\,\delta a\cdot\delta t = (lu + mv + nw)\,\delta a\cdot\delta t \qquad (\mathrm{m}^3)$$

は $\delta t$ なる時間中に $\delta a$ を通過する流体の体積を表す．(19) の $\delta t$ の係数 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\delta a$ を $\delta a$ を通る流体の flux と呼び，

(20)　$$I = \int_s (lu + mv + nw)\, da = \int_s \mathbf{V} \cdot \mathrm{n}\, da \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

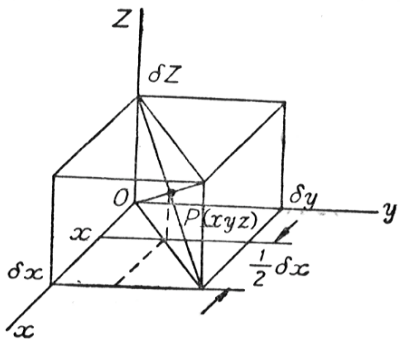
を面 $S$ を通る total flux(全流束)とよぶ．これは $S$ を通って流出する流体の単位時間あたりの体積であり，体積速度ともいう．

流体内の一点 $P$ を中心とし，辺の長さがそれぞれ $\delta x$　$\delta y$　$\delta z$ である微小な直方体を考え，この直方体の表面から流出する flux を計算してみる(第3・21図)．$P$ 点の速度成分を $(u, v, w)$ とすると，この直方体の $yz$ 面上の速度は平均して

(21)　$$u \pm \frac{1}{2}\delta x \frac{\partial u}{\partial x}$$

であると考えられる．士の複 $P$ 点の前と後との面を意味する．

よって $P$ 点の前の面 $\left(x + \frac{1}{2}\delta x\right)$ から $+x$ 方向に流出する flux と $P$ 点の後の面 $\left(x - \frac{1}{2}\delta x\right)$ から $+x$ 方向に流入する fluX との差は



第3・21図

(22)　$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

である．同様のものを $v$ と $w$ について求めると，この直方体から流出する flux とこれに流入する flux の差は

(23)　$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z$$

で与えられる．この量は容積 $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ なる直方体内に溜っている流体が単位時間に減少する体積を示している．よって (23) のカッコの中は単位時間に $P$ 点附近から流体が流れ去る体積の割合(体積密度) を示しており，

(24)　$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathrm{div}\, \mathbf{V}$$

を速度 $\mathbf{V}$ の発散(divergence)と呼ぶ．発散とはある領域から流体が流れ去ってその領域内に貯えられている体積が次第に減少してゆく割合を示す係数であり，これが負の値ならば，逆にこの領域に流体が溜ってゆくことを示す．

有限の領域を閉じた面で囲んで，この領域内の各点の発散を計算して合計すれば，その値はこの閉曲面から流出する体積速度に等しいことになり，

(25)　$$\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint (lu + mv + nw)\, da$$

または

(26)　$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{V}\, dv = \int_s \mathbf{V} \cdot \mathrm{n}\, da$$

なる GAUSS の定理(一名 Divergence Theorem) が導かれる．(26) の左辺は体積 $V$ 内から単位時間に流出する流体の量を表わし，右辺は $V$ を囲む表面 $S$ から流出する流体の量を表わしている．

### 3・3・3　流体の運動方程式

流体の運動の方程式を作るには，流体内に微小体積 $\delta x\delta y\delta z$ を取り，この直方体内に含まれる質量の $\rho\delta x\delta y\delta z$ を一つの粒子とみなして NEWTON の法則を適用する．ゆっくりした運動の極限を考えれば，この粒子のモーメンタムの加速度は

(27)
$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{\partial u}{\partial t}$$

である．一方この粒子に加わる力はこの直方体の表面に加わる圧力であるから，この圧力を求めねばならない．表面が微小であることから，各表平面上の各点の圧力はその表平面の中心の圧力で代表しうるものと仮定する．各表平面の中心の圧力を求めるには，直方体の中心 $(x, y, z)$ の圧力を $p$ とすれば，例えば $x$ 軸に垂直な２面 ($\delta y, \delta z$ 面) $x+\frac{1}{2}\delta x$ と $x-\frac{1}{2}\delta x$ に作用する圧力はそれぞれ

(28)
$$\left(p\pm\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\delta x\right)$$

である．($\delta y\cdot\delta z$) 面上の各点の圧力がこの値(その面の中央の値)に等しいと仮定してあるから $\delta y$ $\delta z$ 面上に加わる全圧力は

(29)
$$\left(p\pm\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z$$

である．この２面 $x+\frac{1}{2}\delta x$ と $x-\frac{1}{2}\delta x$ に作用する全圧力の差は，粒子 $\rho\delta x\delta y\delta z$ に作用する力の $x$ 成分であると考えられ，その大きさは

(30)
$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x\delta y\delta z$$

となる．よって運動の方程式は

(31)
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z},$$

または

(32)
$$\rho\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}=-\nabla p$$

である．ここに $\rho$ の時間的または空間的の変化 $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right.$ および $\left.\nabla\rho\right)$ と $\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}$ との積は二次の微小量であるから省いてある。さらに3・2の (2) (9) および (11) の $c$ の値を用いて (31) を変形すると，$\rho$ と $p$ の代りに凝縮 $s$ で表わした形を得

(33)
$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial y},\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial z},$$

または

(34)
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}=-c^2\nabla s$$

となる．運動の方程式の形は（31）または（33）またはそのベクトル形を用いればよい．

流体の運動を記述するには $\rho\ p\ u\ v\ w$ なる 5個の変数を必要とするが，これらの変数相互間を関係付ける条件としては運動の方程式が三つ求められたにすぎない．問題を解いて解を見出すためにはあと二つの条件を見出す必要がある．その一つとして通常連続条件が用いられる．これは流体の実質が不滅であることを示す条件である．いま $t$ なる時刻に $\delta x\delta y\delta z$ なる体積を占めていた流体が膨脹して $\delta t$ なる時間の後に，その体積が，

(35)　$$(1+\Delta)\delta x\delta y\delta z$$

となったものとする．$\Delta$ は体積膨脹率である．このような場合には $\Delta\delta x\delta y\delta z$ だけの体積はなる領域から溢れ出してある速度 $\mathbf{V}(u, v, w)$ で流出する筈である．この流出量は $\mathbf{V}$ の発散を計算すれば求められるが，その値は体積膨張の速度 $\dfrac{\partial\Delta}{\partial t}$ によって規定される．よって<u>単位時間に体積の膨張する割合が流体の流出する割合に等しい</u>ことを示す．

(36)　$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{V}$$

を流体の連続方程式と呼ぶ．微小運動の場合には $\Delta=-s$ とおけるから，(36) は

(37)　$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{V}$$

としてもよい．音響の問題では（37）を用いるのが便利である．

流体の問題を解くのに必要なもう一つの条件は流体の示性式と呼ばれる条件で,理想気体の場合には3･1の (6) が示性式である．種々の気体や液体に関する示性式の決定は困難な場合が多いが，主として熱力学および物性論の分野で研究されている．

### 3・3・4　速度ポテンシャル [1]

運動方程式（34）と連続方程式（37）とを連立させて解けば，流体の運動状態は明らかに示されることになるが，これがベクトル方程式であるために解法が複雑である．しかし電磁界理論においてスカラーポテンシャルを用いることにより静電界の問題が美事に解けることから類推して，流体理論においても速度ベクトルの代りにスカラー量を用いて運動を表現することができれば非常に都合がよい．このような見地から速度ポテンシャル $\phi$ が導入された．

(33) を解いて速度 $\mathbf{V}$ と $s$ との関係を求めるために，これを $t$ で積分してみると

(38)　$$u=-c^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t s\,dt+u_0,\qquad v=-c^2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^t s\,dt+v_0,\qquad w=-c^2\frac{\partial}{\partial z}\int_0^t s\,dt+w_0,$$

またはベクトル表示で

(39)　$$\mathbf{V}=-c^2\nabla\int_0^t s\,dt+\mathbf{V}_0\qquad(\mathrm{m/s})$$

（1）　velocity potential

となる．ただし偏微分方程式であることから $\nabla$ と $\int_0^t dt$ との順序を交換して計算し，また $\mathbf{V}_0$ は $t=0$ における流体の速度を表わしている．多くの場合 $\mathbf{V}$ の初期値 $\mathbf{V}_0$ は位置（$x, y, z$）の一価スカラー函数の偏微分形

(40)
$$u_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x}, \qquad v_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \qquad w_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z},$$

または

(41)
$$\mathbf{V}_0 = -\nabla \phi_0$$

の形で表わせる．もしもこのようにおくことができれば

(42)
$$\phi = c^2 \int_0^t s\,dt - \phi_0$$

なるスカラ－函数 $\phi$ を用いることにより，速度（39）は

(43)
$$\mathbf{V} = -\nabla \phi$$

の形で表わすことができる．したがって，われわれは（37）と（34）を解いて $\mathbf{V}$ を求める代りにスカラー量 $\phi$ を求めればよいことになり，操作が非常に簡潔になる．このような $\phi$ を速度ポテンシャルと呼び，LAGRANGE によって流体理論に導入された．

速度ポテンシャルは，これを任意の方向 $s$ で微分して負号をつけるとその方向の流体の速度成分をあたえるようなスカラー函数である．したがって流体内のある点の速度の大きさおよび方向を知るには，函数 $\phi$ のその点における最も急激に減少する方向およびその減少の割合を知ればよい．あたかも斜面を見てその面上を流れる水の流れの方向を知るかのようなものである．

最初静止していた流体が運動し始めた場合には $\mathbf{V}_0 = 0$ とおくことができ

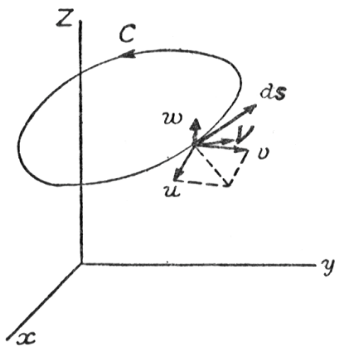
(44)
$$\phi = c^2 \int_0^t s\,dt \qquad (\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

となる．振動の問題はこの形で充分である場合が多い．

速度ポテンシャルの力学的意味を考えることは大して重要な問題ではないが，

(45)
$$\rho_0 \mathbf{V} = -\rho_0 \nabla \phi$$

の形に書いてみると左辺は運動量であるから，右辺の $\phi$ は静止している流体の単位質量に瞬時的に作用してある運動を生ぜしめるような印加衝撃外力のポテンシャルであると考えられる．(2)



第3・22図

### 3・3・5　循　環

流体の占めている空間内に第3・22図のように任意の閉曲線 $C$ を想像し，$C$ の微小部分の長さを

（2）　モーメンタムを $p$，外力を $F$ とすると　$p = mv$，$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = F$，

$\rho_0 \mathbf{V}$ なるモーメンタムを生ずべき外力の形は $-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0 \nabla \phi\right]$ である．

で表わす．$C$ 上の各点における線素 $ds$ と流体速度$\mathbf{V}$ の $ds$ 方向の成分との積 $\mathbf{V}\cdot ds$ を $C$ に沿って同一方向に1周した線積分

(46)
$$\int_C \mathbf{V}\cdot ds = \int_C (lu+mv+nw)ds = \int_C \left( u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds} \right) ds$$
$$= \int_C (udx + vdy + wdz)$$

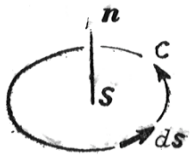
を$\mathbf{V}$の $C$に沿う循環 [3] と名付ける．

$\mathbf{V}$が速度ポテンシャルを有する場合には，(46) は

(47)
$$\int_C \mathbf{V}\cdot ds = -\int_C \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \right) = -\int_C d\phi$$
$$= -\phi(a) + \phi(a) = 0$$

となる．すなわち $\mathbf{V}$ がポテンシャルを有すれば $\mathbf{V}$の $C$に沿う循環は常に零となる．

いま閉曲線 $C$ を縁辺とした表面 $S$ を考え，この表面上の任意の点の法線を$\mathbf{n}$ とする(第3・23図)．ただし $\mathbf{n}$の正方向は $ds$を $C$ に沿う積分方向とするとき，右ネジを $ds$ の方向にまわしてネジが進む方向を $\mathbf{n}$ の正の方向とする．ベクトルの公式によれば



第3･23図

(48)
$$\int_C \mathbf{V}\cdot ds = \int_S (\nabla\times\mathbf{V})\cdot\mathbf{n}da$$

であるから，$\mathbf{V}$ がポテンシャルを有するときは

(49)
$$\nabla\times\mathbf{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{i}_z = 0$$

でなければならぬ．ここに $\nabla\times\mathbf{V}$ はまた rot $\mathbf{V}$ とも記し rotation $\mathbf{V}$ ( $\mathbf{V}$の回転) と呼ぶ量で，$S$ 面上に分布する流体の渦運動の強さを表わす．したがって (49) はこの部分に渦運動の存在しないことを示している．よって $\phi$ が存在するような領域を渦の無い領域 [4] と呼ぶ．

渦が無いという性格は重要なものであるが，流体が渦のない運動をするためには二三の制限を必要とする．それは

( i)　流体に摩擦(したがって粘性)がないこと，

(ii)　流体に外力が作用せぬこと，ただし重力のようなポテンシャルを有する力(保存力) は作用してもよい，

(iii)　運動が無限小であること

である．またこのような条件が成立している流体内では

( i)　閉曲線　$C$が流体と共に移動する場でもその閉路 $C$に沿う回転は一定値に保たれること，

(ii)　流体の有限の範囲に描いた閉路　$C$に沿う回転が最初に零ならばそれ以後この閉路に沿う回転は常に零であること

が示される．

(3)　circulation
(4)　irrotational domain

なお $\nabla \times \mathbf{V}$ はまた vortex(渦の強さ)とも呼ばれ，これは $\mathbf{V}$ とは直角の方向を向く軸ベクトルであるが，循環は vortex の $S$ 面上の法線成分を加え合せたスカラー量である．

## 3・4　音 波 の 一 般 式

煤頁が至る所一様な場合には速度ポテンシャルが存在するという仮定が成立するから，3・3の（37）の右辺は

（1）
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla \phi = -\nabla^2 \phi \ ,$$

（2）
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (\text{Laplacean})$$

と書くことができ，したがって流体の連続方程式は

（3）
$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla^2 \phi$$

と表わされる．一方3・3・4の（42）を $t$ で微分すると

（4）
$$c^2 s = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

となるから，(3) と (4) から $s$ を消去すると $\phi$ に関する関係式

（5）
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi$$

を得る．(5) を音波の一般式と呼び，(5) を解いて得た $\phi$ の内で与えられた境界条件と初期条件とを満足するものを取り出し，それより $s$ または $\mathbf{V}$ を決定すれば実際の音場を表わす解が得られる．

煤頁が非圧縮性流体であると仮定できる場合には，$c \to \infty$ と考えられるが同時に $s \to 0$ となり，$c$ と $s$ との間には

（6）
$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ c \to \infty}} c^2 s = \frac{p - p_0}{\rho_0} = \text{有限確定値}$$

なる関係が保たれていると考えられる．このような場合には連続方程式3・3の（37）は

（7）
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

となり，さらに渦のない運動の場合には速度ポテンシャルの形で表現できて

（8）
$$\nabla^2 \phi = 0$$

となる．(8) は LAPLACE の方程式と呼ばれる偏微分方程式であり，重力場の問題，静電場の問題，静電流および熱流の問題等にしばしば現われる重要な方程式である．したがってこの方程式の解法は広く研究され，一般にもよく知られている．音響理論では非圧縮性流体の性質が予想以上に有用なものであることが次第に理解されるであろう．例えば水のような，空気に比べてその圧縮性が非常に小さく，ほとんど非圧縮性と見なして差支えない流体内の音波伝播音速が，空気中の音速の高々５倍位

に止まっている．したがって水の容易に予想し得る運動から気体の運動の様子を推察するヒントを掴むことができる．

(5) または (8) による音波のエネルギーは，

(9)
$$T = \iiint \frac{\rho}{2}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{\rho}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}dv \qquad (\mathrm{J}),$$

(10)
$$\mathrm{V} = \frac{\kappa}{2}\iiint s^2\,dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\rho}{c^2}\int_V\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 dv \qquad (\mathrm{J}),$$

ただし
$$dv = dx\,dy\,dz$$
である．

### 3･4･1　平 面 波

音波の一般式 (5) は，音源から遠くはなれた点の音場を表現する場合には，平面波の式 3・2 の (11) と一致せねばならぬ．いま (5) において $\phi$ が座標 $x$ と $t$ のみの函数であって，$y$ と $z$ には無関係であると仮定すると

(11)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

となるから，(5) は

(12)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

となり，その解は

(13)
$$\phi = f(ct-x)+F(ct+x) \qquad (\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

となる．これより $x$ 方向の粒子速度 $\dot{\xi}$ は

(14)
$$\dot{\xi} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -f'(ct-x)+F'(ct+x) \qquad (\mathrm{J})$$

であり，$f$ と $F$ は任意函数であるから，3・2 の (12) と比較すれば全く同一の解であることが示されている．

### 3・4・2　対 称 球 面 波

音波から余り遠くない場所では平面波の仮定は成立しない．このような，音源をも含む領域において最も単純な音場の形を表現したものが単一点音源（呼吸球）から輻射される対称球面波である．

音波の問題は暫くおき，音波が空間内の一点 0 から四方に対称形に輻射される場合を考えてみよう．このような場合には空間の任意の点のポテンシャル $O$ は原点 $O$ からの距離 $r$ と時間 $t$ のみの函数として表わされる．いま原点 $O$ を基点とする球座標 $(r,\theta,\varphi)$ を用いて空間内の点を表わすと，同じ点

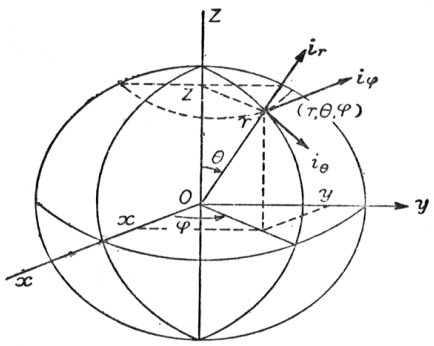
を直角座標（$x, y, z$）で表わした場合に

(15)
$$x = r\sin\theta \cos\varphi\,,$$
$$y = r\sin\theta \sin\varphi\,,$$
$$z = r\cos\theta$$

となることが容易に示される．したがって空間内にある線素の長さ $ds$ を与える式の形は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot d\varphi^2$$

となる．このような座標系においては



第3・24図　球座標.

(17)
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

であることが示される．

対称球面波の場合には，$\phi$ が $r$ と $t$ のみの函数と考えられるので（17）の第一項以外は消滅し，(5) は

(18)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

と書ける．(18) は対称球面波の波動方程式である．

(18) と同じ結果を求めるのに，また別の考え方から出発することもできる．$\phi$ が $r$ と $t$ のみの函数である場合に，空間内の任意の点の $r$ 方向の速度は $-\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$ であり，この値は $r$ が等しい球面上では至る所等しい値を取る．よって半径 $r$ なる球面を通って外向に流出する flux は

(19)
$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot 4\pi r^2 \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

であり，この球面の存在する所の $\delta r$ なる厚さの球殻の内面を外向に通る flux と外面を外向に通る flux との差は

(20)
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot 4\pi r^2\right]\delta r \qquad \text{または} \qquad -4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\delta r$$

である．しかるに球殻の体積は

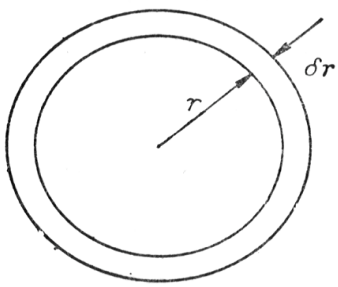
(21)
$$\delta v = 4\pi r^2\delta r$$

であるから，この球殻の内面と外面を通る flux の差はまた

(22)
$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot 4\pi r^2\delta r\,,$$

または
$$-\frac{\partial s}{\partial t}\cdot 4\pi r^2\delta r$$

と表すこともできる．(20) と (22) は同一のものを表しているか



第 3・25 図

ら，これより

(23)
$$r^2\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

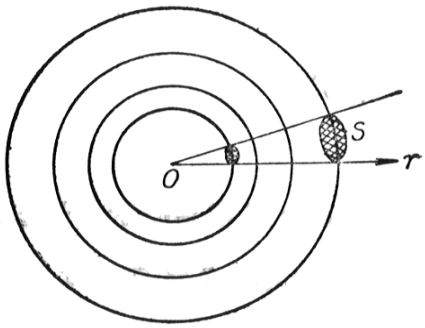
を得る．これに（4）を用いると

(24)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

となり（18）と同形となる．

（18）または（24）を変形すると

(25)
$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}$$



第3･26図

と書ける．これは $r\phi$ を未知函数と考えると（12）と同形であるから，(25）の解は

(26)
$$r\phi=f(ct-r)+F(ct+r)$$

である．(26）から求めた $\phi$ は対称球面波の音場内の任意の点の速度ポテンシャルである．その第一項は原点から外向（ $r$ の正方向）に進行しながら発散する球面波を表わし

(27)
$$\phi=\frac{1}{r}f(ct-r),$$

(28)
$$cs=\frac{1}{r}f'(ct-r)$$

となる．これを見ると，波形 $f$ は不変に保たれているが音場は $\frac{1}{r}$ に比例して減衰してゆくことが示される．したがって単位体積内のポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{r^2}$ に比例して減衰する(第3. 26図)．

音場内の流体の粒子速度はいずれの点でも $r$ 方向を向き

(29)
$$\dot{\xi}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{r}f'(ct-r)+\frac{1}{r^2}f(ct-r)$$

である．この形を見ると粒子速度は $\frac{1}{r}$ に比例して減衰する項と $\frac{1}{r^2}$ に比例して減衰する項との和の形であって，(28）の凝縮の場合よりも複雑である．しかし少し音源から遠去かった点では第二項は第一項に比べて無視し得るようになるので，$r$ の大きな範囲では $\dot{\xi}$ も $\frac{1}{r}$ にしたがって減衰するといえよう．ただ $r$ の小さな範囲（音源の近所）では $\dot{\xi}$ は $r$ に関して単純な形の分布をしていない．

解（26）の残りの半分

(30)
$$\phi=\frac{1}{r}F(ct+r)$$

は原点を中心とする球面上に一様に分布する音場が原点に向って収斂しながら進行する内向収斂波を表わしている．このような波動は単独では作ることができないが，球状の空洞の中心から発射された対称球面波が空洞壁で反射されて中心に向って戻る場合には，この形の波動が存在する．これら外向発散波および内収斂波は $r$ を非常に大きくすると $+r$ 方向および $-r$ 方向に進行する平面波の式

の表現と一致することが示される.[1]

発散波または収斂波のみの持つエネルギーを計算すると,その全エネルギーの半分は運動エネルギー,残り半分はポテンシャルエネルギーであることが示される.

境界のない広い空間内を外向または内向に進行する対称球面波の音場は（27）または（30）で表わされるが，この解は $r=0$ の点（原点）では発散してしまうため，原点の近傍は除外しておかねばならぬ．実際問題として，このような対称球面波が存在するためには，原点に点音源が存在することが必要である．しかしこの点音源からある時間だけ音を発しその後音を発することを止めたとすると音の止んでいる時刻には，球対称の音場が周囲の空間に存在するが，点音源の表面を通る flux は零でなければならぬ．このような場合に音場を表現すべきポテンシャルの形を決定するには，一般的（26）の内で音源を囲む半径 $a$ なる小さな球を考え，この球面上を通る flu x が消滅するようなものを取る必要がある．したがって（26）の $\phi$ は

(31)
$$\lim_{a\to 0}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot 4\pi a^2\right)=0$$

を満足させねばならぬ．したがって（26）にて $r=0$ とおいたものが（31）を満足するためには

(32)
$$f(ct)+F(ct)=0$$

であることが必要となり，これより上記の境界条件を満足する対称球面波のポテンシャルは

(33)
$$r\phi=F(ct+r)-F(ct-r)$$

の形でなければならぬことになる．

（33）を任意の具体的な初期値で表現するために，$t=0$ における速度ポテンシャルの分布および初期凝縮の函数形が

(34)
$$\phi=\phi_0(r),\qquad c^2 s=\frac{\partial\phi}{\partial t}=x_0(r)$$

で与えられたものとすると，（33）より

(35)
$$\begin{aligned}&F(r)-F(-r)=r\phi_0(r),\\&F'(r)-F'(-r)=\frac{r}{c}x_0(r)\end{aligned}\qquad(t=0)$$

を得るから，$F(r)$ および $F(-r)$ を　$\phi_0$ と　$x_0$ で表わすことができる．ここに $r$ は常に正の値を取るので $F(r)$ および $F(-r)$ を決定するために二つの初期値　$\phi_0$ および　$x_0$ を知る必要がある．

簡単な例として初期凝縮　$x_0(r)$ のみが値を有する場合には

(36)
$$\phi_0(r)=0$$

とおけるので，（35）より

---

（1）　外向発散波　$crs=-\frac{\partial}{\partial r}(r\phi)$,　　$r\to\infty$　とおくと　　$cs=\dot{\xi}$.

　　内向収斂波　$crs=+\frac{\partial}{\partial r}(r\phi)$,　　$r\to\infty$　とおくと　　$cs=-\dot{\xi}$.

(37)
$$F'(r) = -F'(-r) = \frac{1}{2}\frac{r}{c}x_0(r)$$

となり，この初期値によって $t$ なる時刻に空間内に生ずる凝縮の値は

(38)
$$s = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{F'(ct+r)-F'(ct-r)}{cr}$$

となる．この値は $ct>r$ なるか $ct<r$ なるかによって異なる値を取る．すなわち $ct<r$ の範囲では $(ct+r)>0$ であり

(39)
$$F'(ct+r) = \frac{ct+r}{2c}x_0(ct+r)$$

となるが，$(ct-r)<0$ であるから

(40)
$$F'(ct-r) = F'(-\{r-ct\}) = -\frac{(r-ct)}{2c}x_0(r-ct)$$

となり，結局（38）は

(41)
$$s = \frac{1}{2c^2r}\{(r+ct)x_0(r+ct)+(r-ct)x_0(r-ct)\}$$

となる．一方 $ct>r$ の範囲では

(42)
$$F'(ct+r) = \frac{(ct+r)}{2c}x_0(ct+r),\ (ct+r>0)$$

(43)
$$F'(ct-r) = \frac{(ct-r)}{2c}x_0(ct-r),\ (ct-r>0)$$

となるので

(44)
$$s = \frac{1}{2c^2r}\{(ct+r)x_0(ct+r)-(ct-r)x_0(ct-r)\}$$

となり（41）と（44）は異なる値となる．

この結果をさらに具体的に示すために簡単な例を示してみよう． $t=0$ における凝縮 $s$ の分布の形 $x_0(r)$ が最も単純な形を取る場合の例として，第3・27図のような半径 $a$ なる球面内の流体が一様に $s_0$ なる値の凝縮状態にあり，その外側の流体は凝縮しない状態 $s=0$ であったと仮定し，それ以後各時刻における流体内の各点の $s$ の変化する様子を求めてみる．半径 $a$ なる球の内部に一様に $s_0$ なる凝縮を生ぜしめるには，$a$ なる球形の隔膜を張りその中の圧力を加減してその流体の凝縮を $s_0$ にする．こうすれば膜の外の流体は $s=0$ である．次に $t=0$ にてこの膜を取り去ったとすると，圧力変化は時間と共に次第に外に伝播して行く．その有様は（41）および（44）で表わされている筈である．

この例の場合の初期条件は

(45)
$$r \ll a:\ x_0(r) = c^2 s_0,$$
$$r \gg a:\ x_0(r) = 0$$

と書ける．よって（41）および（44）にこれを代入すれば任意の時刻 $t$ における任意の点 $r$ の凝縮が

求められる．いまある時刻 $t_0$ なる瞬間の空間内の凝縮の分布を求めてみると，$r>ct_0$ なる範囲では常に $r+ct_0>a$ であるから

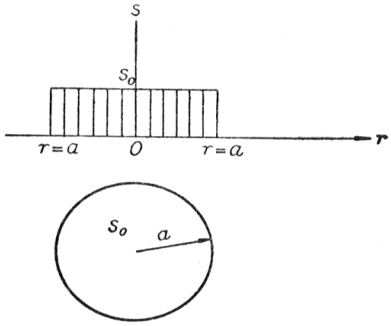
(46)　$$x_0(r+ct_0)=0$$

となるが，$r-ct_0$ は $r<ct_0+a$ の範囲では $a$ より小さくなるので

(47)　$$x_0(r-ct_0)=c^2 s_0$$

となり，$s$ の分布は（41）より

(48)　$$s=\frac{s_0}{r}(r-ct_0),\quad (ct_0<r<ct_0+a),$$
$$s=0\qquad (r>ct_0+a)$$



第3・27図

となる．同様に $r<ct_0$ の範囲では

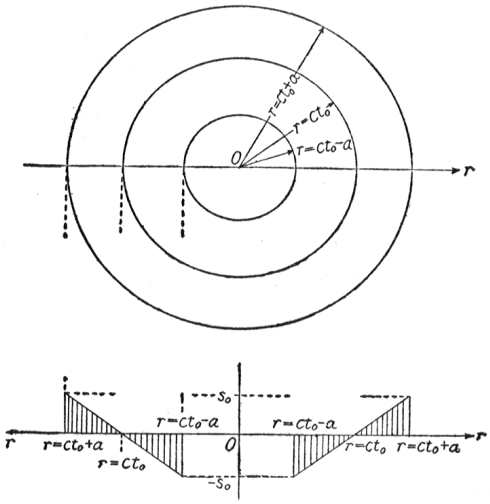
(49)　$$|r-ct_0|\neq a,\qquad \text{または}\qquad r\neq ct_0-a$$

にしたがって

(50)　$$x_0(r-ct_0)=\begin{cases} c^2 s_0, & (ct_0-a<r<ct_0)\\ 0, & (r<ct_0-a)\end{cases}$$

となり，（44）より

(51)　$$s=\frac{-s_0}{r}(ct_0-r)$$
$$=\frac{s_0}{r}(r-ct_0),\quad (ct_0-a<r<ct_0)$$
$$s=0,\qquad (r<ct_0-a)$$



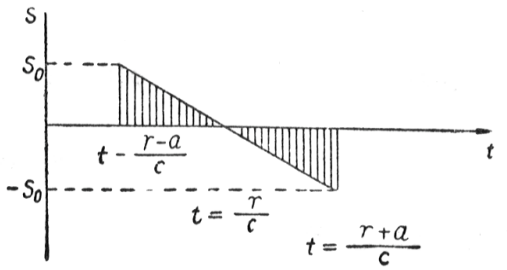
第3・28図

を得る．なお $r<ct_0$ の範囲における $(r+ct_0)$ の値は $ct_0$ が $a$ より小さい場合には $r+ct_0<a$ となることがあり，その場合は（44）の第一項が値を有することになるが $ct_0<a$ の範囲では常に $ct_0+r>a$ となり第一項は零となる．

（48）と（51）とより $t_0$ なる時刻の $r$ 軸上の $s$ の分布は第3．28図のようになる．同様にして $r=r_0$ なる点において時間 $t$ の経過に従う $s$ の変化を求めてみると第3・29図のようになる．これをみると，最初 $2a$ なる球状の範囲に $s_0$ なる凝縮を与えておいたものが，伝播する途中では，その前面半分が $+s_0$，後半分が $-s_0$ なる球殻状となって拡がってゆくことが分る．

この球殻内の粒子速度は

(52)　$$\phi=c^2\int_0^t s\,dt,$$
$$\dot{\xi}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}$$
$$=-c^2\frac{\partial}{\partial r}\int_0^t s\,dt$$



第3・29図

から求めることができる．空間内の $r_0$ なる点をこの球殻が通過する際のこの点の粒子速度は，

$\dfrac{r_0-a}{c}<t<\dfrac{r_0+a}{c}$ の範囲の任意の時刻には

(52)
$$\phi=c^2\int_{\left(\frac{r_0-a}{c}\right)}^{t}\frac{s_0}{r_0}(r_0-ct)\,dt+c^2\int_{t}^{\frac{r_0+a}{c}}\frac{s_0}{r_0}(r_0-ct)\,dt$$
$$=\frac{cs_0}{4r_0}\left\{a^2-(r_0-ct)^2\right\},$$

(54)
$$\dot{\xi}=\frac{cs_0}{4r_0^{\,2}}(a^2+r_0^{\,2}-c^2t^2)$$

なる値を取り，これ以外の時間には零である．この結果を $r>>a$ なる場所で吟味すると，粒子速度 $\dot{\xi}$ は初めは正（ $r$ の外向）であり $t=\dfrac{r}{c}$ なる時刻に零となり，その後負（ $r$ の内向）となる．

球殻の境界面　$r=ct\pm a$の面上の速度は，その球殻側（内側）では

(55)
$$\dot{\xi}=\pm\frac{cas_0}{2r}$$

なる値を取るが，外側では突然零となる．このような速度分布の不連続は，現象として起り得べきものではないが，数学的にこのような結果の現われた原因は最初に与えた $s$ の分布の不連続性によるものである．このように，初期分布の形が現実と喰い違っていると求めた結果にも不都合が生ずる．

（35）を一般の場合に解いた形は，

$ct<r$ の範囲では

(56)
$$r\phi=\frac{1}{2}\left\{(r+ct)\phi_0(r+ct)+(r-ct)\phi_0(r-ct)+\frac{1}{c}\int_{r-ct}^{r+ct}zx_0(z)\,dz\right\},$$

$ct>r$ の範囲では

(57)
$$r\phi=\frac{1}{2}\left\{(ct+r)\phi_0(ct+r)-(ct-r)\phi_0(ct-r)+\frac{1}{c}\int_{ct-r}^{ct+r}zx_0(z)\,dz\right\}$$

となり，これが（33）に初期条件を適用した一般形である．この解は原点を除去しておかなければならぬが，原点を囲む小さな球面上の $\phi$ を知っておくことは必要である．それには

(58)
$$\phi(0)=\lim_{r\to 0}\frac{F(ct+r)-F(ct-r)}{r}=2F'(ct)$$

と（35）から

(59)
$$\phi(0)=tx_0(ct)+\phi_0(ct)+ct\phi_0'(ct)$$
$$=tx_0(ct)+\frac{d}{dt}\left[t\phi_0(ct)\right]$$

として求める．[2]

（2）　$F'(ct)$ は $F(ct\pm r)$ を $r$で微分して後　$r\to 0$ とおくことを示す．

## 3・4・3　POISSON－STOKES の定理

空間内の初期分布が与えられた場合に空間内の任意の点 $P$ の速度ポテンシャルを求める作図的の方法を POISSON(1819)および STOKES(1850)が示した．

$t=0$ における空間内の初期分布の値が

(60)
$$\phi=\phi_0(x,y,z),\qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}=x_0(x,y,z)$$

で与えられたとする．いま $P$ を中心として半径 $r$ なる球を描き，この球の表面上に分布する音場の速度ポテンシャル $\phi$ を全球表面上に平均したものを

(61)
$$\bar{\phi}=\frac{1}{4\pi}\int_S \phi\, d\Omega$$

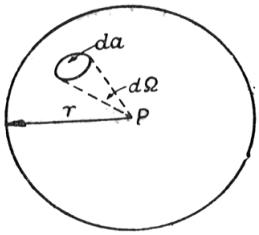
と表わすことにする．ここに $d\Omega$ は $P$ の周囲に張る立体角，$S$ は $r$ なる球の全表面積であり，微小面積 $da$ に対して

(62)
$$d\Omega=\frac{da}{r^2}$$

である．同様に凝縮 $s$ の球面上の平均値を

(63)
$$\bar{s}=\frac{1}{4\pi}\int_S s\,d\Omega,$$

とすると，$\bar{\phi}$ および $\bar{s}$ は $r$ と $t$ のみの函数と考えることができる．よって (4) に $\delta\Omega/4\pi$ を乗じて球面上に積分すると，$\bar{\phi}$ と $\bar{s}$ との関係として



第3・30図

(64)
$$c^2\bar{s}=\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}$$

を得，また粒子速度の法線方向成分の平均値は

(65)
$$\bar{\dot{\xi}}_r=-\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r}$$

となるから，この $\bar{\phi}$ と $\bar{s}$ とを用いて $r$ の位置 $r$ なる幅の球殻から流出する total flux を計算すると

(66)
$$\frac{\partial\bar{s}}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r}\right),$$

または $\bar{s}$ を消去して

(67)
$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial t^2}=\frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r}\right)$$

を得る．よって，$\bar{s}$ と $\bar{\phi}$ は $P$ 点を中心とする対称球面波の波動方程式を満足することが分る．したがって $\bar{\phi}$ および $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}$ の初期値が与えられていれば，それ以後の $P$ 点のポテンシャルは，この対称球面波の原点のポテンシャルの値として (59) から計算することができる．すなわち

(68)
$$\phi(P)=t\bar{x}_0(ct)+\frac{d}{dt}\left[t\bar{\phi}_0(ct)\right],$$

ただし $\overline{x_0}(ct)$ と $\overline{\phi_0}(ct)$ は半径 $r$ なる球面上に分布する初期値 $\phi_0$ および $x_0$ を全球表面上に平均したものである．

これを用いて任意の時刻における $P$ 点のポテンシャルを求めるには

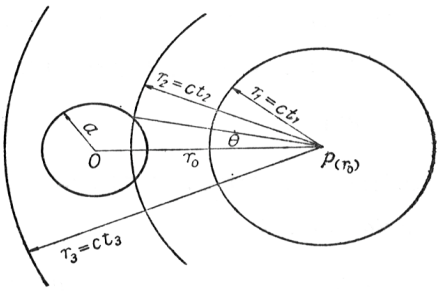
(i)　$P$を中心として $r=ct$ なる球を描き，

(ii)　この球面上に分布する $\phi_0(r)$ および $x_0(r)$ の平均値を計算し，それを $\overline{\phi_0}(ct)$ および $\overline{x_0}(ct)$ とする．

(iii)　(ii)の結果に $t$を乗じ $t\overline{\phi_0}(ct)$と $t\overline{x_0}(ct)$を作る．

(iv)　さらに $\dfrac{d}{dt}\left[t\overline{\phi_0}(ct)\right]$ を作る．

(v)　(iii)と(iv)とを加えて（68）を得る．これが $t$ なる時刻の $P$ 点の $\phi$ である．




第3·31図

例として，前に示した半径 $a$ なる球面内に初期凝縮 $s_0$ が一様に分布し，その外では $s$ が零である場合を解いてみる．$t=0$における形は，

$$r<a:\ \ x_0=2c^2s_0\ ,\ \ \phi_0=0\ ,$$
$$r>a:\ \ x_0=0\ ,\ \ \phi_0=0\ .$$

である．先ず $P$ を中心として $t=t_1$ なる時刻に相当する $r_1=ct_1$ なる半径の球を描いてみると，$ct_1<r_0-a$ であれば，この球 $P$は球 $O$と交わらない．よって球 $P$ 上の $x_0$ の平均値 $\overline{x_0}$ は零であり

$$t<\frac{r_0-a}{c}\qquad \text{では}\qquad \phi(P)=0\ ,$$

$r_0-a<ct_2<r_0+a$ なる範囲にある $t_2$ なる時刻には，半径 $r_2=ct_2$ なる球 $P$ は球 $O$と交わる．この場合球 $P$が球 $O$ に切り取られる部分の面積は $2\pi(ct_2)^2(1-\cos\theta)$ であるから，球 $P$上の $s$ の総和は

(69)　$$s_0\cdot 2\pi(ct_2)^2\ (1-\cos\theta\ )$$

であり，これを球 $P$上で平均すると

(70)　$$x_0(ct_2)=\frac{s_0\cdot 2\pi(ct_2)^2(1-\cos\theta)}{(ct_2)}=\frac{s_0}{2}(1-\cos\theta)$$
$$=\frac{a^2-(ct_2-r_0)^2}{4ct_2r_0}\ ,$$

ここに $r_0$ は $OP$ 間の距離である．よって

(71)　$$\phi(p)=\frac{cs_0}{4r_0}\left\{a^2-(ct_2-r_0)^2\right\}$$

となり（54）と一致す．さらに $t>\dfrac{t+a}{c}$ となると，またもや $\phi(P)=0$ となる．

### 3・4・4　　点音源（呼吸球）

3・4・2 で述べた対称球面波はその原点に音源が存在してすべての方向に一様に音波を輻射した場合

に生ずる音場の形をしている．このような対称球面波を生ずべき音源の形を調べておくことは重要なことがらである．

いま原点を囲む微小な半径 $a$ の球面を考え，この球面を通して球体内の流体がすべての方向に一様に一定の割合で噴出または吸入される場合を考えてみよう．この球面(表面積 $4\pi a^2$)から単位時間に噴出する流体の量を $f(t)$ とすると，[1] 原点から $r$ なる距離の点の速度ポテンシャル $\phi$ は

(72)
$$4\pi r\phi = f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

で与えられる．なんとなれば

(73)
$$\lim_{r\to 0}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot 4\pi r^2\right) = f(t) \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

となるからである．ただし $a\to 0$ とみなしている．

このように一点において流体をすべての方向に一様に噴出したり吸入したりするものを呼吸球または点音源と呼び，単位時間に吸入または噴出する流体の量 $f(t)$ を点音源の強さという．点音源は数学的に考えられる最も簡単な音波の形であるが，実際に作ることはむずかしい．

### 3・4・5　二 重 音 源

強さが等しく，符号が互に反対な二つの点音源が非常に接近して存在する場合を二重音源と呼ぶ．二重音源については節を改めて詳しく述べるが，[2] 一般的に $\phi$ が（5）の解である場合には，粒子速度の成分 $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 等も（5）の形を満足することが示されるので（72）の $\phi$ が波動方程式（5）の解である場合には，

(74)
$$4\pi\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right\} \qquad (\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

で定まる $\phi$ もやはり（5）の解でなければならぬ．(74) の $\phi$ は原点に二重音源が存在する場合の音場であることが後に明らかになる．なお（74）で表わされる二重音源を構成する二つの点音源は $x$ 軸上にならんでおり，これを二重音源の軸と呼ぶ．

## 3・5　単 弦 振 動 音 波

任意の条件のもとに成立する音場の形はすべて 3・4 の（5）から導くことができ，その形は $f\left(t-\frac{r}{c}\right)$ の形となる．しかして函数形 $f$ は音源（$r=0$）の有する振動波形 $f(t)$ によって定まる．したがって $f$ は任意の形であるのが普通であるが，われわれが音源として扱うものは

（1）
$$f(t) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\omega t - \varphi)$$

---

（1）　$f(t)$ は球面を通る全フラックス．
（2）　3・5・4参照．

の形で与えられる場合が多い．またもしも $f(t)$ が $t$ の周期函数であってその波形が単純でない場合には

（2）　$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)$$

の形で与えられ，この場合にも，その一つの周波数成分に着目すれば（1）を扱うのと全く同じことになる．

一般に音波の問題は，その波長の長短によって趣きの異なった様相を生ずる場合が少くなく，問題を論ずるにも常に波長との関連性を念頭において論ずる場合が多い．そのような場合には音源の波形を表わす項に $f(t)$ を用いるよりも，その振動数を明確に表現した $\cos\omega t$ の形を用いた方が便利である．よって問題を，音源が

（3）　$$f(t)=C\cos(\omega t-\varphi)=C\cos(2\pi\nu t-\varphi)$$

なる振動を持続する場合に局限し，これから輻射される音波の列を単絃振動音波と呼び，この波列には初めも終りもなく無限につながっているものと仮定して，[1] 音場の性質を調べることにする．

### 3・5・1　複素数形の導入

物理現象としてわれわれが観測し得る量は常に実数量である．しかしこれを数学的に取扱う場合には複素数を用いた方が便利な場合が多い．そのためにわれわれは複素数を導入する．したがって複素数を用いて計算して得た結果の虚数部に対しては慎重な吟味を必要とする．

音源の持続する振動波形 (3) を複素数を用いて表わすには

（4）　$$e^{\pm i\omega t}=\cos\omega t\pm i\sin\omega t$$

なる恒等式を利用して，$f(t)$ を

（5）　$$f(t)=Ce^{-i(\omega t-\varphi)}=Ae^{-i\omega t}$$

の実数部で表わす．ここに $A$ は $Ce^{i\varphi}$ なる複素数である．[2] なお $-i\omega t$ と負号の方を用いたのは後に音波の空間分布を計算するのに便利なためである．電気回路で用いる $e^{+j\omega t}$ 系において，$+j$ の所を $-i$ と置きかえると $e^{-i\omega t}$ 系で表わした量となる．また $Ae^{-i\omega t}$ の虚数部は $-iC\sin(\omega t-\varphi)$ となり，ここに考えている音源とは全く別の音源の持続振動を表わしている．

この表現を用いると，方程式

（6）　$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$　〔1・1 の（6）〕

の解は

（7）　$$x=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$$

---

（1）　有限の時間だけ持続する単絃振動音波はその倍音構成が単純でなくなる．たとえば J.A.STRATTON “Electromagnetic Theory” Mc Graw Hill, 1941, p.291, 参照.

（2）　$C=|A|$

と書ける．ここに $A\,B$ は複素定数である．(7) が1・1の (7) または (8) で示した解

(8)
$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t = C\cos(\omega t - \varphi)$$

と恒等的に等しいためには

(9)
$$A = \frac{1}{2}(a - ib) = Ce^{-i\varphi}\,,$$
$$B = \frac{1}{2}(a + ib) = Ce^{i\varphi}\,,$$

または

(10)
$$a = A + B = 2C\cos\varphi\,,$$
$$b = i(A - B) = 2C\sin\varphi$$

の関係が必要である．しかし (7) $A\,B$ を

(11)
$$A = |A|e^{i\varphi_A}\,,\qquad B = |B|e^{i\varphi_B}$$

とおき，(7) の実数部を求めてみる

(12)
$$x = |A|\cos(\omega t - \varphi_A) + |B|\cos(\omega t - \varphi_B)$$
$$= \left\{|A|\cos\varphi_A + |B|\cos\varphi_B\right\}\cos\omega t + \left\{|B|\sin\varphi_B - |A|\sin\varphi_A\right\}\sin\omega t$$

となる．よって (7) の実数部が (8) と等しいためには

(13)
$$a = |A|\cos\varphi_A + |B|\cos\varphi_B\,,$$
$$b = |B|\sin\varphi_B - |B|\sin\varphi_A\,,$$

または

(14)
$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A|\cdot|B|\cos(\varphi_A + \varphi_B)}\,,$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{|B|\sin\varphi_B - |A|\sin\varphi_A}{|A|\cos\varphi_A + |B|\sin\varphi_B}$$

なる関係があればよいことになる．

次に (5) の形で表わされる複素量を取扱うのに必要な二三の性質を述べておく．複素数 $A$ を

(15)
$$A = A_0 e^{-i\omega t} = (\alpha + i\beta)e^{-i\omega t} = (\alpha + i\beta)(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

とおくと，$A$ の複素共　数 $\tilde{A}$ は$A$ の $-i$ の所を $+i$ とおきかえたものであるから

(16)
$$\tilde{A} = (\alpha - i\beta)e^{+i\omega t}$$

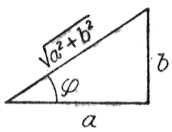
と書ける．いま $A$の実数部を $\Re e(A)$ 虚数部を $\Im m(A)$ と記すと[4]

(17)
$$\Re e(A) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,\sin(\omega t + \phi)\,,$$
$$\Im m(A) = \beta\cos\omega t - \alpha\sin\omega t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,\cos(\omega t + \phi)\,,$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta}$$

---

(3)　$C = \sqrt{a^2 + b^2}$，$\varphi = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$，$a = C\cos\varphi$，$b = C\sin\varphi$

(4)　real part of $A$，　imaginy part of $A$．



であるから

(18)　$$A\tilde{A} = \alpha^2 + \beta^2 = |A^2|,$$

(19)　$$\Re e(A) = \frac{A + \tilde{A}}{2}$$

なる関係を得る．また二つの複素数 $A_1$ と $A_2$ の実数部の積は

(20)　$$\Re e(A_1)\cdot\Re e(A_2) = \frac{1}{4}(A_1 + \tilde{A}_1)(A_2 + \tilde{A}_2)$$
$$= \frac{1}{4}(A_1 A_2 + \tilde{A}_1\tilde{A}_2 + A_1\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1 A_2)$$

で与えられ，これは積 $A_1 \cdot A_2$ とは異なることは勿論である．

$A$ はまた時間 $t$ の周期函数であり，その時間平均値は

(21)　$$\overline{A} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} A\,dt$$

で与えられる．ここに $\tau$ は周期である．二つの複素数 $A_1$ と $A_2$ の実数部の積（20）の時間平均を計算すると，$\sin\omega t \cdot \cos\omega t$ 等の1周期にわたる平均値は消滅するので

$$\overline{\Re e(A_1)\cdot\Re e(A_2)} = \frac{1}{4}(A_1\tilde{A}_2 + A_2\tilde{A}_1) = \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)$$

または

(22)　$$\overline{\Re e(A_1)\cdot\Re e(A_2)} = \frac{1}{2}\Re e(A_1\tilde{A}_2)$$

を得る．以上，(18) より (22) までの形は複素数形で表わされた振動現象を扱うのに重要なものであり，ことに (22) はエネルギー流の時間平均値を求めるのにしばしば用いられる公式である．

### 3・5・2　単 弦 振 動 音 波

3・4 の一般式 (5) において速度ポテンシャル $\phi$ が $e^{-i\omega t}$ なる形の時間因数を有するものと仮定すると，損失のない媒質内の音波の位相定数は

(23)　$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \qquad \text{または} \qquad \omega = kc$$

となり，(5) は

(24)　$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$$

と表される．これは損失のない媒質内の単弦振動音波の一般式である．媒質に損失が存在する場合には速度ポテンシャルの存在が考えられなくなり，3・3・3 の（3・2）に損失力の項を加えたものを直接解かねばならぬ．[1]

$x$ 軸方向に伝播する平面波の形は，(24) より

（1）　3・6 参照．

(25)
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k^2 \phi = 0$$

となる．これは（6）と同形であるから，その解は（7）と同形である筈であり

(26)
$$\phi = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} .$$

この解の性質を吟味するために時間因数　$e^{-i\omega t}$　を附加し

(27)
$$\phi = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t}$$

とすれば，第一項は

(28)
$$\phi = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad \text{または} \quad \phi = Ae^{-i(\omega t-kx)}$$

となり，この実数部

(29)
$$\phi = |A|\cos(kx-\omega t+\varphi_A)$$

は明らかに $x$ の正方向に進行する波を表わしている．同様に（27）の第二項は

(30)
$$\phi = Be^{-i(kx-\omega t)} \quad \text{または} \quad \phi = |B|\cos(kx+\omega t-\varphi_B)$$

は $x$ の負の方向に伝播する波を表わしている．よって通常は時間因数を省いた形（26）を見て直ちに（29）または（30）を想像し，$Ae^{ikx}$　を$x$　の正方向に進行する波動，$Be^{-ikx}$　を$x$　の負方向に進行する波動という．

この平面波が存在する空間内の単位体積内のエネルギーの時間平均値は

(31)
$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_0 ck^2 |A^2| \qquad (\mathrm{J/m^2})$$

であり，またエネルギー流密度は

(32)
$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho_0 ck^2 |A^2| = \frac{1}{2}\frac{\rho_0\omega^2 |A^2|}{c} \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

である．

## 3・5・3　　対 称 球 面 波

対称球面波の場合には（24）は

(33)
$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} + k^2 (r\phi) = 0$$

となり，この解は

$$r\phi = Ae^{ikr} + Be^{-ikr} .$$

よって中心に，$Ae^{-ikct}$　なる波源のある場合の外向発散波は

(34)
$$\phi = \frac{A}{4\pi r} e^{ik(r-ct)}$$

で与えられる．ここに$A$　は点音源の強さ（$\mathrm{m^3/s}$）である．

音源から持続音が発せられているとすれば，（34）で表わされる波が球面状波面を描いて拡がって行

（2）　3･3･2 の（44）および（55）と比較せよ．

くときに,波頭面で包まれた球の内部は音のエネルギーで満たされていることになる.波頭面が拡がるにしたがってエネルギーの満された空間の容積は拡がるので，空間内にはそれだけエネルギーが増加したことになる．この増加エネルギーは音源から供給されたものと考えなければならぬ．したがって波面が拡がるのに要するエネルギーから音源の輻射エネルギーの強さを計算することができる．それにはまず半径 $r$ なる球面上の流体が外の流体に向って 1 秒間になす仕事量を計算する．それは圧力と外向粒子速度との積を全球面にわたって集計したものであるから

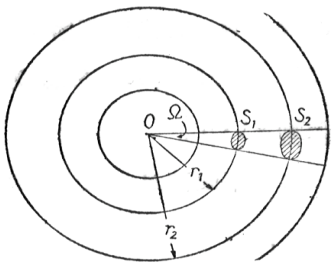
(35)
$$W = -(p_0 + \kappa s)4\pi r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\left(p_0 + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) 4\pi r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (\mathrm{W})$$

である．これに（34）を代入し，（22）を用いて時間平均求めると

(36)
$$\overline{W} = \frac{\omega^2 \rho_0 |A|^2}{8\pi c} = \frac{\rho_0 c k^2 |A|}{8\pi} \qquad (\mathrm{W})$$

となる.[1] この値は $r$ に無関係に一定である．よって音源から単位時間に輻射されるエネルギー流と見なすことができる.

対称球面波の中心から任意の距離の球面上を外向に流れるエネルギー流の総和が一定であるということは，波面が音源から遠去かるにしたがって,波面上の単位面積を貫くエネルギー流(エネルギー束)が稀薄になるということを意味する(第3・32図)．これは球面波が $\frac{1}{r}$ にしたがって減衰することと同意義である.



$s_1 = \Omega r_1^2$，$s_2 = \Omega r_2^2$．
第3・32図

したがって平面波の仮定は音源から遠くはなれた点で，球状の波面の拡がりがほとんど無視できる範囲でのみ成立する概念である.

なお平面波のエネルギー束（32）にて $|A|$ の代りに $\frac{|A|}{4\pi r}$ とおき，球面の表面積 $4\pi r^2$ を乗ずると（36）と同形となる.

（33）の解のもつ一つの項

(37)
$$\phi = \frac{B}{4\pi r} e^{ik(r+ct)}$$

は原点に $\frac{\omega^2 \rho_0 |B|^2}{8\pi c}$ (W) なる割合でエネルギーを吸収する吸収点のある音場を表しているが，実現困難である.

次に対称球面波に関する諸量を計算する公式を示しておく.

速度ポテンシャル:

(38)
$$\phi = \frac{A}{4\pi r} e^{i(kr-\omega t)} \qquad (\mathrm{m}^2/\mathrm{s}).$$

凝 縮:

（1）　$e^{i2(kr-\omega t)}$ の時間平均値は $\frac{1}{2}$ である.

(39)
$$s = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2}\frac{A}{4\pi r}e^{i(kr-\omega t)} = -\frac{i\omega}{c^2}\phi \qquad (\text{数値}).$$

粒子速度[(2)]:

(40)
$$\dot{\xi}_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)e^{i(kr-\omega t)} = \left(\frac{1}{r} - ik\right)\phi \qquad (\mathrm{m/s}),$$

遠方 $kr >> 1$ では

$$\dot{\xi}_r = -ik\phi \qquad (\mathrm{m/s}).$$

圧　力:

(41)
$$p = p_0 + \kappa s = p_0 + \rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = p_0 - \frac{i\omega\rho_0 A}{4\pi r}e^{i(kr-\omega t)}$$
$$= p_0 - i\omega\rho_0\phi \qquad (\mathrm{N/m^2}).$$

粒子の変位:

(42)
$$\xi_r = \int\dot{\xi}_r\,dt = -\frac{1}{i\omega}\frac{A}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)e^{i(kr-\omega t)}$$
$$= \frac{1}{\omega}\frac{A}{4\pi r}\left(k + \frac{i}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$
$$= \frac{1}{\omega}\left(k + \frac{i}{r}\right)\phi \qquad (\mathrm{m}),$$

遠方では $(kr >> 1)$

(43)
$$\xi_r = \frac{k}{\omega}\phi = \frac{1}{c}\phi = \frac{A}{4\pi rc}e^{i(kr-\omega t)} \qquad (\mathrm{m}).$$

全輻射エネルギー流（音響出力）:　$(kr >> 1)$

瞬時値:

(44)
$$W = \frac{\rho_0\omega k}{4\pi}A^2 e^{2i(kr-\omega t-\frac{\pi}{2})} \qquad (\mathrm{W}).$$

時間平均値:

(45)
$$\overline{W} = \frac{\rho_0\omega k}{8\pi}|A|^2 = \frac{\rho_0 ck^2|A|^2}{8\pi} = \frac{\rho_0\omega^2|A|^2}{8\pi c} \qquad (\mathrm{W}).$$

エネルギー流密度（音の強さ）

(46)
$$\overline{w} = \frac{\overline{W}}{4\pi r^2} = \frac{\rho_0\omega^2|A|^2}{32\pi^2 r^2 c} = \frac{\rho_0 ck^2}{2}\left(\frac{|A|}{4\pi r}\right)^2 \qquad (\mathrm{W/m^2}).$$

音響出力（全輻射エネルギー流の時間平均値）$\overline{W}$(W)　なる点音源から $r$(m)はなれた地点の

---

（2）　$r = a$ なる呼吸球の表面の速度が, $\dot{\xi}_{r0}e^{-i\omega t}$ なるときは

$$A = 4\pi a^2\dot{\xi}_{r0}\frac{e^{ika}}{1-ika} \qquad (\mathrm{m^3/s}).$$

もしも　$ka << 1$ のときは,

$$A \approx 4\pi a^2\dot{\xi}_{r0} = S\dot{\xi}_{r0} \qquad (\mathrm{m^3/s}).$$

音場の諸定数の尖頭値を次に示しておく．[3] ただし $kr >> 1$．

音源の強さ:

(47)
$$|A| = 2\sqrt{\overline{W}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega}\sqrt{\frac{c}{\rho_0}} \qquad (\mathrm{m^3/s}).$$

速度ポテンシャル:

(48)
$$|\phi| = \frac{\sqrt{\overline{W}}}{2\pi r}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega}\sqrt{\frac{c}{\rho_0}} \qquad (\mathrm{m^2/s}).$$

音 圧:

(49)
$$|\delta p| = \frac{\sqrt{\overline{W}}}{r}\sqrt{\frac{\rho_0 c}{2\pi}} \qquad (\mathrm{Pa}).$$

粒子速度:

(50)
$$|\dot{\xi}| = \frac{\sqrt{\overline{W}}}{r}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_0 c}} \qquad (\mathrm{m/s}).$$

粒子変位:

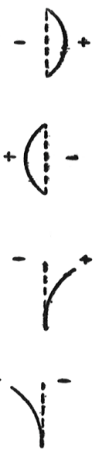
(51)
$$|\xi| = \frac{\sqrt{\overline{W}}}{r}\,\frac{1}{\omega\sqrt{2\pi\rho_0 c}} \qquad (\mathrm{m}).$$

凝 縮:

(52)
$$|s| = \frac{\sqrt{\overline{W}}}{r}\,\frac{1}{c\sqrt{2\pi\rho_0 c}} \qquad (\text{数値}).$$

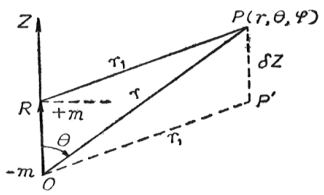
### 3・5・4　　二重音源から輻射される音場

単一点音源は，実際には近似的にさえも存在しないことは前に述べた通りである．実際に用いる発音体はたとえば音叉にしても，また膜状の振動体にしても，それが一方に変位した瞬間には振動体の変位した側の凝縮が正に,反対側が負になる.[1] 次の瞬間振動体が逆方向に変位すれば凝縮の正負が反対になる (第3･33図)．したがって振動体から遠く離れた点で観測すると,音源は強さが等しく符号が反対の二つの点音源が非常に接近して存在しているように見える．このような構造の音源を，もう少し数学的に理想化したものを二重音源と呼ぶ.[2]



第3･33図

原点 $O$ に強さ $-m$ なる点音源があり，これから **R** なる距離の点に $+m$ なる点音源があるものとする．**R** は $O$ から測ったベクトルであり，ベクトル **R** を $z$ 軸とし，球座標 $(r, \theta, \varphi)$ を用いて空間



第3･34図

---

(3)　音圧の実効値が $1(\mu\,\mathrm{bar})$ のとき，音の強さのレベルは 74(dB) である．音の強さのレベルとはエネルギー束が $10^{-12}(\mathrm{W/m^2})$ を 0(dB) として表わしたデシベル目盛である．

(1)　凝縮が正とは流体が圧縮されること，負とは稀薄にされることである．

(2)　double source

内の点を表示する(第3・34図)．点音源 $-m$ と $+m$ とが二重音源を構成する場合には，その間隔 $R$ は無限小であるが $m$ は非常に大きく，$R$ と $m$ との積は一定の有限確定値に保たれているような状態にあると仮定する．すなわち

(53)　$$\lim_{R\to 0} mR = \text{一定値}$$

となるようなものを二重音源と定義する．この際ベクトル $m\mathbf{R}$ を二重音源の強さと呼び，$\mathbf{R}$ の向きを二重音源の軸の方向と呼ぶ．

二重音源の軸を $z$ 軸に取り，空間内の点 $P(r,\theta,\varphi)$ 音場を求めよう．音場は $z$ 軸に関して対称形であるべきであるから，$\varphi$ には関係なく，$r$ と $\theta$ のみの函数となる筈である．いま $P$ 点と $+m$ との距離を $r_1$ とすると，$+m$ および $-m$ なる二つの点音源による $P$ 点の音場は

(54)　$$\phi(P) = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

と表わされる．この式において $\mathbf{R}\to 0$ とした極限値を求めれば二重音源による音場を得るのであるがその手段として $P$ から $z$ 軸に平行 $-z$ 方向に $R$ だけ離れた点 $P'$ を取ってみると，

$OP' = r_1$ , $PP' = \delta z = R$ となる．一方 $P'$ 点の $-m$ による音場は

$$\frac{-me^{ikr_1}}{4\pi r_1}$$

であるから，(54) は $\dfrac{-m}{4\pi}\ \dfrac{e^{ikr}}{r}$ なる函数の $P$ 点と $P'$ 点との値の差と考えることができる．よって $\delta z = R$ が小さな場合には

(55)　$$\phi(P) = \frac{-m\delta z}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

と書くことができる．ここに $m\delta z$ は二重音源の強さであるからこれを

(56)　$$m\delta z = B$$

とおくと，$B$ なる強さの二重音源による音場は

(57)　$$\phi(P) = \frac{-B}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

となる．これは3・4・5の (74) と同じ結果である．(57) は $z$ を含んでいるが，これを $r$ と $\theta$ で表わしておく方が都合がよい．そのために，

(58)　$$\delta r = \cos\theta\cdot\delta z\,,\qquad \frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}$$

を用いて変形すると，

(59)　$$\phi(P) = -\frac{B}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos\theta$$
$$= \frac{B}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\cos\theta\cdot e^{ikr}$$

となる．

音源に非常に接近した所 $kr \ll 1$ すなわち $r \ll \dfrac{\lambda}{2\pi}$ なる範囲では，(59) は

(60)　$$\phi = \frac{B}{4\pi r^2}\cos\theta\,,$$

また音源から離れた所 $kr \gg 1$ すなわち $r \gg \dfrac{\lambda}{2\pi}$ の範囲では

(61)　$$\phi = \frac{-ikB\cos\theta}{4\pi r}e^{ikr}$$

となる．よって凝縮は遠方では $\dfrac{1}{r}$ に比例して減衰する．粒子速度の径方向成分は $-\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$ ，横方向成分は $-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}$ であるが，これを計算してみると，音源の近くでは両者は同程度の大きさとなるので二重音源の近くでは粒子の運動方向は径方向ばかりでなく $\theta$ 方向にも流動することがうかがわれる．しかし遠方では横方向成分は径方向成分の $\dfrac{1}{kr}$ になっているので，充分音源から離れた点では粒子の運動方向はほとんど径方向であると見なしてよい．

二重音源の振幅 $B$ が $B_0 e^{-i\omega t}$ なる形であることを想い起せば，音場の実数形は

(62)　$$\phi = \frac{+kB_0\cos\theta}{4\pi r}\sin(kr-\omega t)$$

と書くことができ，$\theta$ なる一つの方向に輻射される音波の波頭面は，ほとんど球面の一部と見なし得る．すなわち (62) にて

(63)　$$kB_0\cos\theta = A$$

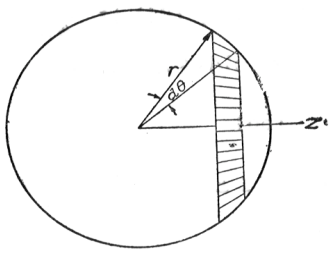
とおけば球面波の表示形式と一致する．よって単位面積を貫ぬくエネルギー流密度は (46) より計算することができ

(64)　$$\overline{w} = \frac{\rho_0 ck^4 B_0^2\cos^2\theta}{32\pi^2 r^2}\qquad (\mathrm{W/m^2})$$

となる．これを用いて二重音源から輻射される全エネルギー流を求めるために，半径 $r$ なる球面上の $\delta\theta$ なる幅の球帯の面積

$$2\pi r\,\sin\theta\cdot r\delta\theta$$

を (64) に乗じ $\theta$ について積分すると



第3･35図

(65)　$$\overline{W} = \int_0^{\pi}\frac{\rho_0 ck^4 B_0^2\cos^2\theta}{32\pi^2 r^2}2\pi r\cdot\sin\theta\cdot r d\theta$$
$$= \frac{\rho_0 ck^4}{24\pi}B_0^2\qquad (\mathrm{W})$$

となり，$r$ に無関係の大きさを得る．よってこれは $B_0\cos\omega t$ なる二重音源から毎秒輻射されるエネルギー流（音響出力）であると見なすことができる．これとエネルギー流密度との関係は

(66)　$$\overline{w} = \frac{3\cos^2\theta}{4\pi r^2}\overline{W}\qquad (\mathrm{W/m^2})\,.$$

音波の波長が長い場合には，$k$ が小さいので一般式は

(67)
$$\nabla^2\phi = 0$$

となり，流体はあたかも非圧縮性であるかのような観を呈する．このような場合には単一点音源による対称球面波は

(68)
$$\phi = \frac{A}{4\pi r}$$

とかくことができるが，二重音源による音源は

(69)
$$\phi = \frac{B\cos\theta}{4\pi r^2}$$

と表わされ，対称球面波とは非常に異なる形となる．なお波長に比して小さな領域における音場は常に（67）を用いて表わすことができる．このことは問題を解く上に有力な足場となる．

### 3・5・5　音響インピーダンス

音波の伝播する有様を調べる場合に，音場内の一点の音圧 $\delta p$（圧力の変化分）とその点の粒子速度 $\dot{\xi}$ との関係がわかると便利な場合が多い．そこで圧力 $p$ を

(70)
$$p = p_0 + \kappa s = p_0 + \rho_0 c^2 s = p_0 + \delta p \qquad (\mathrm{Pa})$$

とするとき

(71)
$$Z = \frac{p - p_0}{\dot{\xi}} = \frac{\delta p}{\dot{\xi}} = R - iX \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

を比音響インピーダンス[(1)]と定義する．$Z$ は電気回路における分布定数回路のインピーダンスに相当するものであり，その実数部を音響抵抗，虚数部を音響リアクタンスと呼ぶ．時間因数に $\exp(-i\omega t)$ を用いているので虚数部が負の場合に質量性リアクタンスを示す．

インピーダンスの性質を理解するために（71）を

(72)
$$\delta p = (R - iX)\dot{\xi}$$

と書き，粒子速度が

(73)
$$\dot{\xi} = \left|\dot{\xi}_0\right| e^{-i\omega t} = \left|\xi_0\right| (\cos\omega t - i\sin\omega t) \qquad (\mathrm{m/s})$$

なる場合の音圧を求めてみると

(74)
$$\delta p = \left|\xi_0\right| (R\cos\omega t - X\sin\omega t) - i\left|\xi_0\right| (X\cos\omega t + R\sin\omega t)$$

となる．よって（73）の実数部 $\left|\xi_0\right|\cos\omega t$ に対応する音圧は

(75)
$$\delta p = \left|\xi_0\right| (R\cos\omega t - X\sin\omega t) = \left|\xi_0\right| \sqrt{R^2 + X^2}\cos\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{X}{R}\right)$$
$$= \left|\xi_0\right| \left\{R\cos\omega t + X\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \qquad (\mathrm{Pa})$$

とかける．これより

---

（1）　speciffc acoustic impedance, unit area acoustic impedance ともいう．
$\frac{Z}{\rho c}$ を媒質の比音響インピーダンス比（specific impedance ratio）と呼ぶ．
ただし $\rho_0 c$ は空気の音響特性インピーダンスである．

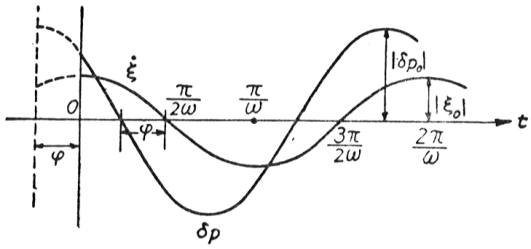
(76)　$$\delta p = |\delta p_0| \cos(\omega t + \varphi)$$

と書けば，音圧の振幅および位相角は

(77)　$$|\delta p_0| = |\dot{\xi}_0| \sqrt{R^2 + X^2} = |\dot{\xi}_0| |Z|,$$

(78)　$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

と書け，$X$ が正の場合には$\delta p$ は $\dot{\xi}$ より時間的に$\varphi$ だけ位相が進んでいることが示される(第3・36図)．また(75) より




第3・36図　音圧 $\delta p$ と粒子速度 $\dot{\xi}$ の位相関係.

(79)　$$\delta p = \delta p_R + \delta p_X,$$

(80)　$$\delta p_R = |\xi_0| R \cos \omega t,$$

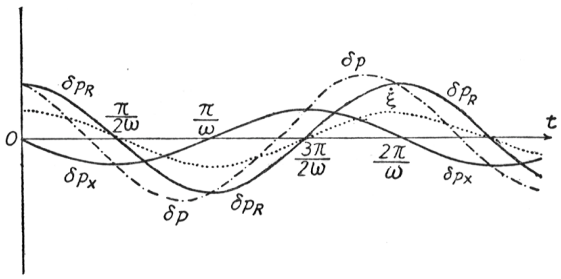
(81)　$$\delta p_X = |\xi_0| X \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -|\xi_0| X \sin \omega t$$

と書けば，$\delta p_R$ は音圧$\delta p$ の中で粒子速度$\dot{\xi}$ と同相の変化をする成分であり，$\delta p_X$ は$\dot{\xi}$ より$\frac{\pi}{2}$ だけ位相の進んだ変化をする成分である(第3・37図)．なお $R$　$X$　$|Z|$　$\varphi$ の間には

(82)　$$Z = |Z| e^{-i\varphi} = R - iX$$

(83)　$$R = |Z| \cos \varphi,$$
$$X = |Z| \sin \varphi$$

なる関係があり，これらを複素平面上で表わせば第3・38図のようになる．したがって $\delta p$ と $\xi$ との関係も第3・39図のようになる．




第3・37図　音圧 $\delta p$ が速度と同相成分 $\delta p_R$ と速度より $\frac{\pi}{2}$ だけ位相の進んだ成分 $\delta p_X$ の合成波形であることを示す.

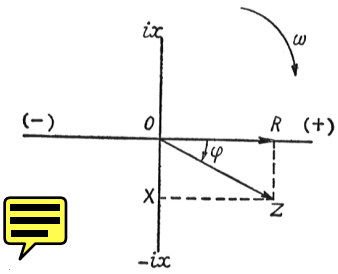
(75) の虚数部は粒子速度が (73) の虚数部 $\dot{\xi} = -|\dot{\xi}| \sin \omega t$ で表わされる場合に対応する音圧を示し，これについても全く同様の関係が成立する．

以上の関係から，逆に音圧が

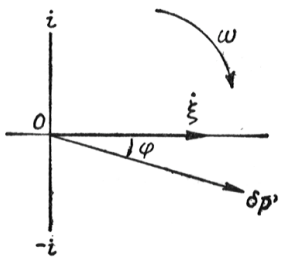
(84)　$$\delta p = |\delta p| \cos \omega t$$

なる場合には粒子速度は

(85)　$$\dot{\xi} = \frac{|\delta p|}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi)$$
$$= \frac{|\delta p|}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{X}{R}\right)$$




第3・38図




第3・39図

と書け，粒子速度は音圧より $\varphi$ だけ位相が遅れていることが示されるが，また

(86)　$$\dot{\xi} = \frac{|\delta p|}{R^2 + X^2} (R \cos \omega t + X \sin \omega t) = \frac{|\delta p|}{R^2 + X^2} \left\{ R \cos \omega t + X \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$
$$= \dot{\xi}_R + \dot{\xi}_X$$

と書けるので

(87) $$\dot{\xi}_R = \frac{|\delta p|}{R^2 + X^2} R \cos\omega t ,$$

(88) $$\dot{\xi}_X = \frac{|\delta p|}{R^2 + X^2} X \sin\omega t = \frac{\delta p}{R^2 + X^2} X \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

はそれぞれ音圧と同相および $\frac{\pi}{2}$ の位相差をもって変化する粒子速度成分である．ここに $\dot{\xi}_X$ は $\delta p$ より $\frac{\pi}{2}$ だけおくれた成分である．

音の強さは波面の単位面積を貫ぬくエネルギー流すなわちエネルギー流密度によって表わされる．これを $w(\mathrm{W/m^2})$ とすれば，その時間平均値は，実数形を用いて

(89) $$\overline{w} = \overline{\delta p \cdot \dot{\xi}} = \frac{1}{2}|\delta p_0||\dot{\xi}_0|\cos\varphi = \frac{1}{2} R |\dot{\xi}_0|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

と書くことができるが，複素数形を用いれば

(90) $$\overline{w} = \frac{1}{2}\Re e(\delta p)\cdot\Re e(\xi) = \frac{1}{2}\Re e(\delta p \cdot \tilde{\dot{\xi}}) = \frac{1}{2}\Re e(Z)\cdot|\dot{\xi}_0|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

と書くこともできる．なおここに

(91) $$\overline{w}^* = \frac{1}{2}\delta p \cdot \tilde{\xi} = \frac{1}{2}|\dot{\xi}_0{}^2|(R - iX) \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

は複素エネルギー流密度であり，その虚数制はリアクタンス中に貯えられるエネルギーに関係した量となっている．(2)

$x$ の正方向に進行する平面波の場合には

(92) $$\xi = Ae^{i(kx-\omega t)}, \qquad \dot{\xi} = -i\omega\xi ,$$

(93) $$\delta p = \kappa\frac{\partial\xi}{\partial x} = -ik\kappa\xi$$

より音響特性インピーダンス(3) が求められ

(94) $$Z_0 = \frac{k}{\omega}\kappa = \rho_0 c \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

となり，これは音響波動抵抗ばかりでリアクタンスを持たない．このことは音圧と粒子速度との間に位相差のないことを示している．

外向に進行する対称球面波のインピーダンスは，(40) と (41) を用いて計算すると

(95) $$Z = \frac{i\omega\rho_0}{ik\left(1+\frac{i}{kr}\right)} = \frac{\rho_0 c}{1+\frac{i}{kr}} = \frac{\rho_0 c k^2 r^2}{1+k^2r^2} - i\omega\frac{\rho_0 r}{1+k^2r^2} = |Z_0|e^{i\varphi} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

(96) $$\varphi = -\tan^{-1}\frac{1}{kr} = -\tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)$$

となる．よって音源の近くでは音圧と粒子速度との間に位相差があり，$\varphi < 0$ すなわち質量リアクタ

(2) リアクタンスについては第Ⅱ編1・1 参照．
(3) acoustic characteristic impedance．電気回路分布定数線路の特性インピーダンスに相当する．

ンスを有するために $\delta p$は $\xi$ より進んでいる．

二重音源による音場の比音響インピーダンスは，音源から遠くはなれた点では対称球面波と同じ形となるが，近い所では速度ポテンシャルが（60）の形をとるので音場は

(97)　$$\xi_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{B\cos\theta}{2\pi r^3} = \frac{2}{r}\phi\,,$$

(98)　$$\delta p = -i\omega\rho_0\phi$$

であり，インピーダンスは

(99)　$$Z = -i\omega\frac{\rho_0 r}{2} = -i\frac{\rho_0 ckr}{2} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

となり，純質量リアクタンスを呈する．[4]

## 3・6　エネルギー損失のために減衰する音波

大気中の音波の近距離伝播を扱う場合にはエネルギー損失による減衰はほとんど問題にするにはおよばぬ程度に微少なのが普通である．しかし減衰が皆無であるというのではなく，少くとも空気の粘性と熱伝導とによる損失が存在し，振動数が $10^4$ (Hz) 程度以上の高音は，100 (m) 程度を伝播する間に著しく減衰する．[1]　実際には，これらの他に大気の状態や境界面の条件などによる損失が加算されるので，近距離伝播においても損失を無視し得ない場合が生じてくる．さらに大気中の遠距離伝播や海中の超音波の伝播を扱うにはエネルギー損失による減衰を無視しては，正しく現象を解析することは困難である．

微小振幅音波のエネルギー損失を代表する第一近似の表現形式はその原因がなんであっても，媒質の粒子速度に比例した抵抗力による損失の形であると考えられる．いま媒質内の 1 点の変位ベクトルを $\mathbf{r}$，その点の粒子速度を $\mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}$，音場のないときの媒質の密度を $\rho_0\,(\mathrm{kg/m^3})$ とし，音場内の微小体積 $dv$ が振動するときに，この体積片に作用する抵抗力を

（1）　$$f = -\sigma\rho_0\mathbf{V}dv \qquad (\mathrm{N})$$

と表わすと，$\sigma\rho_0 dv$ のは体積素片のマサツ係数に相当するので，係数 $\sigma$ は媒質の単位質量あたりのマサツ係数となる．これを抵抗係数と呼ぶことにする．抵抗係数の次元は

（2）　$$\sigma = \left[s^{-1}\right].$$

媒質内の一点の圧力を $p\,(\mathrm{N/m^2})$ とすると，音場が存在するときの力の平衡式は

（3）　$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p - \sigma\rho_0\mathbf{V}\,,$$

媒質の体積弾性率を $\kappa\,(\mathrm{N/m^2})$，音場のないときの圧力を $p_0$ とすれば，音場によって生ずる媒

（4）　音源の輻射インピーダンスについては第 II 編1･2 参照．
（5）　4･7 参照．または Lord RAYLEIGH :“Theory of sound” Chap.xix.

質の凝縮は

（4）　$$s = \frac{p_0 - p}{\kappa}$$

であり，媒質の連続方程式は

（5）　$$s = -\nabla \cdot \mathbf{r}\,.$$

(3) は形を変えれば

（6）　$$\nabla(\kappa s) + \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = 0$$

と書けるが，音場の時間的変化が $e^{-i\omega t}$ の形で表わせるときには，

（7）　$$\nabla^2 s + k'^2 s = 0\,,$$

ここに

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\omega}} = \alpha + i\beta$$

と表わせる．(7) は減衰する音波を表現する一般式である．

$x$ の正方向に伝播する平面波について（7）の解を求めれば

（8）　$$s = s_0 e^{-\beta x + i\alpha x - i\omega t}$$

となるから，$x$ 方向の変位 $\xi$，粒子速度 $\dot{\xi}$ は

（9）　$$\xi = -\int s\,dx = \frac{i s_0}{\alpha + i\beta} e^{-\beta x + i\alpha x - i\omega t} \qquad (\mathrm{m})\,,$$

（10）　$$\dot{\xi} = -\frac{\omega s_0}{\alpha + i\beta} e^{-\beta x + i\alpha x - i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})\,.$$

原点から輻射される対称球面波に対する（7）の解は，$r$ を原点からの距離とすれば

（11）　$$s = \frac{s_0}{r} e^{-\beta r + i\alpha r - i\omega t}$$

であるから，音の伝播速度を $c$ (m/s) とすれば，速度ポテンシャルの形は

（12）　$$\phi = -\frac{c^2 s}{i\omega} = i\frac{c^2 s_0}{\omega r} e^{-\beta r + i\alpha r - i\omega t}\,,$$

したがって $r$ 方向の粒子速度 $\dot{\xi}_r$ および変位 $\xi_r$ は

（13）　$$\dot{\xi}_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{i c^2 s_0}{\omega r}\left( \frac{1}{r} + \beta - i\alpha \right) e^{-\beta r + i\alpha r - i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})\,,$$

（14）　$$\xi_r = \int \dot{\xi}_r\,dt = \frac{-c^2 s_0}{\omega^2 r}\left( \frac{1}{r} + \beta - i\alpha \right) e^{-\beta r + i\alpha r - i\omega t} \qquad (\mathrm{m})\,.$$

半径 $r$ なる球の表面を外向に通過するエネルギー流（音の輻射パワー）の時間平均値は

（15）　$$\overline{W} = 2\pi\rho_0 c^3 \left| s_0^2 \right| \left\{ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} e^{-2\beta r} \qquad (\mathrm{W})\,,$$

この球面上のエネルギー流密度（音の強さ）は

(16)
$$\overline{w} = \frac{\overline{W}}{4\pi r^2} = \frac{\left|s_0{}^2\right|\rho_0 c^3}{2}\left\{1+\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}\frac{e^{-2\beta r}}{r^2} \qquad (\mathrm{W/m^2}).$$

音波の位相定数$\alpha$および減衰定数~~的~~$\beta$は（7）より計算できて

(17)
$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2}}+1\right\}} \qquad (\mathrm{rad/m}),$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2}}-1\right\}} \qquad (1/\mathrm{m})$$

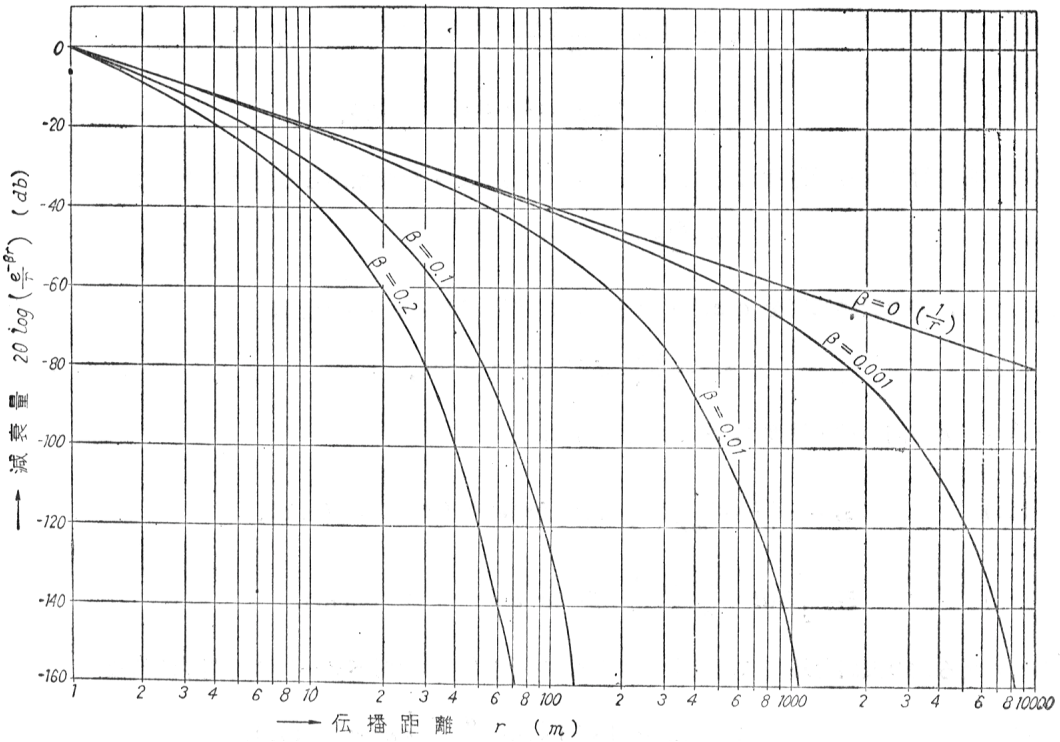
となるが，通常は $(\sigma/\omega)^2$ が1に比して非常に小さいから充分な近似度をもって

(18)
$$\alpha \approx \frac{\omega}{c},$$

$$\beta \approx \frac{\sigma}{2c}$$

とすることができる．(18) は音波に減衰を生ずべき抵抗係数 $\sigma$ と減衰係数$\beta$とを関係づける便利な式である．

$\beta$を色々の値にとり，$r$ を変数として（16）を計算すると第3・40図のようになる．これを見ると100(m)以内の近距離伝播の場合には，$\beta$が 0.001 以下であればエネルギー損失による減衰は観測することが困難であることが予想される．一方 1000(m)以上の長距離伝播の場合にはこの程度の減衰が充分測定され得ることになる．[1]




第3・40図　損失ある媒質内を伝播する対称球面波の減衰量と伝播距離との関係を示す．

（1）　4・6 参照．

## 3・7　音源からの輻射音場を求める KIRCHHOFF の方法

音源が $(x, y, z)$ なる位置にあり，時間 $t$の経過にしたがって音を発している場合に，この周囲の空間内の音場を計算するには KIRCHHOFF の方法を用いるのがよい．音源が空間的な拡がりを有し，かつそれが発する音が時間の函数であるとき，その周囲の音場は

（1）
$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -g(x, y, z, t)$$

で計算できる．ここに $g(x, y, z, t)$ は音源の分布函数であり，$\phi$ はその音源を含む空間内の任意の点の音場を与える速度ポテンシャルである．

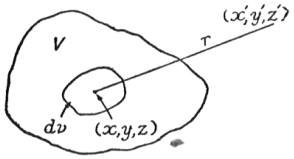
(1) は強制方程式であるが，その隣は音源上の 1 点$(x, y, z)$ と観測点 $(x', y', z')$ との距離を

（2）
$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

とすれば

（3）
$$\phi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{r} g\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right) dv$$

で与えられることが示される.[1][2] これを KIRCHHOFF の方法と呼び，$t$なる時刻の観測点の音場を求めるには音源を微小な点音源の集合体と見なし,各点音源から $\left(t - \frac{r}{c}\right)$時刻に輻射された対称球面波の総和を求めればよいことを示している．この形のポテンシャルを遅延ポテンシャル[3] とも呼ぶ.



第3･41図

もしも $g$ が

（4）
$$g = G(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

の形であれば，(3) は

（5）
$$\phi(x', y', z', t') = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{r} G(x, y, z) e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} dv$$
$$= \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \frac{e^{ikr}}{r} \quad G(x, y, z) dv,$$

ここに
$$k = \frac{\omega}{c}$$

となる．この場合に

（6）
$$\phi = \varphi(x', y', z')e^{-i\omega t}$$

とかけば (1) は

（7）
$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -G(x, y, z),$$

(5) は

---

（1）　Lord LAYLEIGH:"Theory of Sound" II Cbap.XIV,　p.106.
（2）　STRATTON:"EIectromagnetic Theory"Chap. VIII, p.428.
（3）　retarded potential

（8）
$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{e^{ikr}}{r} \quad G(x, y, z)\,dv$$

と書ける．交番音場を扱うには（7）（8）を用いれば充分である．

（3）または（8）において，$g$ または $G$は音源の存在しない領域では値を持たぬから，（3）または（8）の積分も音源のない領域では消滅する．したがって積分範囲は音源の存在する領域を取り囲む空間に局限することができる．

この定理は任意な分布の音源の周囲の音場を求めるのに便利であって,その使用例は第四章以下においてしばしば現われる．しかし実際に利用しようとすると（2）の $r$ のために（8）の体積積分はかなり繁雑なものとなる場合が多い．[(4)(5)]

（4）　たとえば 4・4・2 および下巻，5・2・2.
（5）　この定理の詳細は下巻 9・1参照.