# 第　五　章

# 電　気　音　響　理　論

電気音響学は，BELL によって発明され，その後広く実用に供されるようになった電話用送受話器の動作機構を解析する手段として，電気回路の概念をもって音響現象を理解しようとする一つの試みとして開発された部門であり，米国の KENNELLY 博士およびその門下によって研究の端緒が見出され，わが抜山，黒川両博士はその開拓者といえよう．(1)以後電話，放送，録音，トーキー等の実用分野の発展と相まって，電気音響学および電気音響機器が急速に進歩発達し，これが音響工学の全分野に革新的な影響をもたらしたが，その最も著しい特長は，任意の音源が容易に得られ，測定が簡易かつ精密に行われるようになったことであろう．古く 19 世紀に一応完成を見た理論音響学も，この新鋭機器による実測によって再検討の必要に迫られ，音響学は一段と発展しつつある．

本章は音響理論と電気音響理論との結び付きから説明し，電気音響理論の一般を解説する．なお前にも述べたように，この理論は電気回路に習熟した技術者が音響系および振動系を電気回路と類似の考え方で理解しようとする一つの試みであるから，本章を読む者は電気回路について一応の基礎知識を有することを必要とする．また正弦波振動を表わす時間因数は上巻にならって $e^{-i\omega t}$ を主として使用するから，電気交流回路で使用する記号 $e^{j\omega t}$ と対比するには

$$j = -i$$

と置換する必要がある．なお単位系は国際単位系を基準として採用する．

## 5・1 電気振動回路・機械振動系・音響振動系の類似性

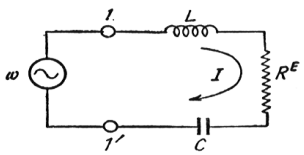
### 5・1・1 電気振動回路

電気回路における最も単純な振動回路は第5・1図のようなインダクタンス $L$ と電気抵抗尺 $R^E$ および容量 $C$ が直列に接続された二端子回路であろう．この回路の端子(2)を $11'$ と記し，この端子間に

(1)　$$E = E_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{(V)}$$

なる交番起電力を加えれば，回路の電流 $I$ は

(2)　$$L\frac{dI}{dt} + R^E I + \frac{1}{C}\int I\,dt = E \qquad \text{(V)}$$



第5・1図　最も単純な電気振動回路.

(1)　A.E.KENNELLY:"ElectricaI Vibratioo lnstruments" McMillan,London, 1923.

(2)　terminal

の解として決定される．

(2) の定常解を求めるには電流の形を

（3）　$$I_s = I_0\, e^{-i\omega t} \qquad \text{(A)}$$

と仮定して (2) に代入すれば，

（4）　$$\left(-i\omega L + R^E + \frac{1}{-i\omega C}\right) I_0\, e^{-i\omega t} = E_0\, e^{-i\omega t}$$

~~上り~~電流の振幅 $I_0$ は

（5）　$$I_0 = \frac{E_0}{R^E - i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \qquad \text{(A)}$$

と定められる．

一方（2）の過渡解は（2）の右辺を 0 とおき，全体を $t$ で微分して

（6）　$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R^E \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

とし，これを解けば

（7）　$$I_t = e^{-\left(R^E/2L\right)t}\left(A e^{-it\sqrt{\omega_0 2 - \left(R^{E2}/4L^2\right)}} + B e^{-it\sqrt{\omega_0 2 - \left(R^{E2}/4L^2\right)}}\right) \qquad \text{(A)},$$

ただし

（8）　$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

である．よって，（2）の一般解は

（9）　$$I = I_s + I_t$$

$$= \frac{E_0\, e^{-i\omega t}}{R^E - i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} + e^{-\frac{R^E t}{2L}}\left\{A e^{-it\sqrt{\omega_0 2 - \left(R^{E2}/4L^2\right)}} + B e^{-it\sqrt{\omega_0 2 - \left(R^{E2}/4L^2\right)}}\right\}$$

である．（9）は任意の初期条件を満足する形であるが，ある時間を経過した後には過渡項 $I_t$ は消滅して定常項 $I_s$ のみが残る．

定常状態のみに着目すると，回路の電流は

(10)　$$I = \frac{E_0\, e^{-i\omega t}}{Z^E} \qquad \text{(A)},$$

(11)　$$Z^E = R^E - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R^E - i X^E = \left|Z^E\right| e^{-i\varphi} \qquad (\Omega),$$

$$\left|Z^E\right| = \sqrt{R^{E2} + X^{E2}}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{X^E}{R^E}$$

で表わされる．ここに $Z^E$ は回路の定数 $R^E$ ,$L$ ,$C$ と印加される電圧の角周波数 $\omega$ ~~の~~とで定まる定数であって，一般に複素数であるが，その単位は抵抗の単位を有す．$Z^E$ を電気回路のインピーダンス(3)

(3)　impedance

と呼ぶ．なお $Z^E$ の実数部 $R^E$ は電気抵抗を表わし，虚数部 $X^E$ はリアクタンスと呼ばれる． $\left|Z^E\right|$ はインピーダンスの絶対値(4)， $\varphi$ はインピーダンスの位相角(5)と呼ばれ，これらを用いると（10）は

(12)
$$I = \frac{E}{\left|Z^E\right|} e^{-i(\omega t - \varphi)} \qquad \text{(A)},$$

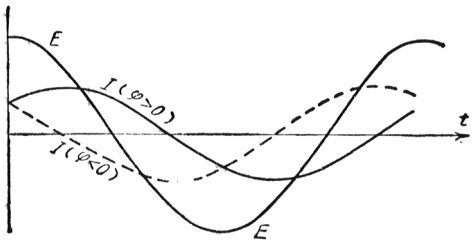
またはその実数部を用いて $E = E_0 \cos \omega t$ に対応する電流として

(13)
$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^{E2} + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

と表わされる．したがって回路の電流は印加される電圧の振幅に比例し，回路のインピーダンスの絶対値に反比例し，かつ電流の位相はインピーダンスの持つ位相角 $\varphi$ だけ電圧の位相からおくれることが示される．位相 $\varphi$ は $\omega L$ と $\frac{1}{\omega C}$ との大きさよって正ともなれば負ともなる．

$\omega L > \frac{1}{\omega C}$ の範囲では位相角 $\varphi$ は正であり，したがって~~リアクタンス~~ $X$ も正である．この範囲を誘導性インピーダンス(6)と呼ぶ．

$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ となる範囲では $\varphi < 0$, $X < 0$ であり，この範囲を容量性インピーダンス(7)と呼ぶ．インピーダンスは回路素子 $L$ と $C$ および角周波数 $\omega$ との相対的関係によって誘導性にもなるし，容量性にもなるが，




第5・2図　$\varphi > 0 : I$ は $E$ より遅れる．
$\varphi < 0 : I$ は $E$ より進む．

$L$ と $C$ とを一定に保っておけば $\omega$ の小さい範囲では容量性であり，$\omega$ の大きな範囲では誘導性となる．抵抗 $R^E$ の小さい回路では，$\omega$ を次第に増加したときに容量性から誘導性に移る所で必らず

(14)
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

となる角周波数が存在し，この状態におけるインピーダンスの値は

(15)
$$\left|Z^E\right| = R^E, \quad (\varphi = 0)$$

なる極小値を取る．したがってこの状態の電流は

(16)
$$I = \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{R^E}$$

たる極大値を取り，かつその位相は電圧の位相と同相となる．これは共振現象であって共振の起る角周波数は

(17)
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(rad / s)}$$

(4) absolute value
(5) phase angle
(6) inductive
(7) cqpacitive

であり，$\omega_0$ を回路の共振角速度と呼ぶ．

以上は電気回路を習う者には手馴れた事項であるが，普通の電気回路理論に用いている $e^{j\omega t}$ 系の時間ベクトル図表と $e^{-i\omega t}$ 系のそれとを対比して示すために（13）を~~教導~~し，かつ第 5・1 表を示した．

第 5・1 表 $e^{-i\omega t}$ 系と $e^{j\omega t}$ 系との対比．

| 項　　目 | $-i\omega$　系 | $j\omega$　系 |
|---|---|---|
| 時　間　因　数 | $e^{-i\omega t}$ | $e^{j\omega t}$ |
| 積分演算子 $\dfrac{d}{dt}$ | $-i\omega$ | $j\omega$ |
| 積分演算子 $\dfrac{d^2}{dt^2}$ | $-\omega^2$ | $-\omega^2$ |
| 積分演算子 $\int dt$ | $\dfrac{1}{-i\omega}$ | $\dfrac{1}{j\omega}$ |
| インピーダンス　$Z$ | $R-iX=\lvert Z\rvert e^{-i\varphi}$，<br>$\lvert Z\rvert=\sqrt{R^2+X^2}$，<br>$\varphi=\tan^{-1}\dfrac{X}{R}$． | $R+jX=\lvert Z\rvert e^{j\varphi}$，<br>$\lvert Z\rvert=\sqrt{R^2+X^2}$，<br>$\varphi=\tan^{-1}\dfrac{X}{R}$． |
| リアクタンス　$X$ | $\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)$ | $\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)$ |

| | | |
|---|---|---|
| インピーダンス図表 | | |
| 電圧電流図表 | $I=\dfrac{E}{Z}=\dfrac{E_0}{\lvert Z\rvert}e^{-i(\omega t-\varphi)}$<br>$=\dfrac{E_0}{\lvert Z\rvert}e^{i\varphi}\cdot e^{-i\omega t}$． | $I=\dfrac{E}{Z}=\dfrac{E_0}{\lvert Z\rvert}e^{j(\omega t-\varphi)}$<br>$=\dfrac{E_0}{\lvert Z\rvert}e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega t}$． |
| | $E=IZ=I_0\lvert Z\rvert e^{-i\varphi}\cdot e^{-i\omega t}$． | $E=IZ=I_0\lvert Z\rvert e^{-j\varphi}\cdot e^{-j\omega t}$． |

第５・１図の回路に蓄えられる電荷量 $Q$ (coulomb) は蓄電器 $C$ の電極に現われる電荷の量であるが，これと電流 $I$ との間には

(18) $$I = \frac{dQ}{dt} = -i\omega Q \qquad \text{(A)}$$

なる関係がある．よって（２）を $Q$ で表わせば

(19) $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R^E\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E \qquad \text{(V)}$$

となる．この形は振動系との対比を詞べるのに重要な形である．

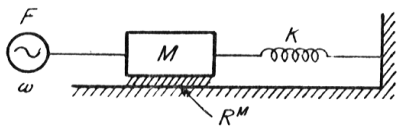
回路でのエネルギー消費速度の時間平均値は

(20) $$\overline{W} = \frac{1}{2}R^E|I|^2 = \frac{1}{2}R^E\left|\frac{dQ}{dt}\right|^2 \qquad \text{(W)}$$

である．この $\overline{W}$ を回路の消費電力[8]と~~呼ぶ~~．ただし $|I|$ と $|\dot{Q}|$ は尖頭値である．

### 5・1・2　機械振動系

機械振動系における最も単純な運動系はバネで支えられた質量に起振力[1]が作用する場合の振動である．第５・３図に示すように，スティフネス $K(\mathrm{N/m})$ なるバネに結合された質量 $M$ (kg) なる物体がマサツ係数 $R$ なる滑らかな面の上を起振力 $F$ の作用によって往復運動する場合を考えてみると，質量 $M$ が平衡の位置から変位する量 $\xi$ は



第 5・3 図　機械振動系．

(21) $$M\frac{d^2\xi}{dt^2} + R^M\frac{d\xi}{dt} + K\xi = F \qquad \text{(N)},$$

$$F = F_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{(N)}$$

で表わされる．また速度を

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} \qquad \text{(m/s)}$$

とすれば

(22) $$M\frac{d\dot{\xi}}{dt} + R^M\dot{\xi} + K\int\dot{\xi}\,dt = F \qquad \text{(N)}$$

と書ける．(21) と (19) および (22) と（２）は全く同形であるから，電気振動回路の諸量と機械振動系の諸量の間には第５・２表のような対応が存在すると考えられる．[2][3]

外力が持続正弦波形の場合に，定常状態振動解より系の機械インピーダンス[4]が定まることは電

---

（8）　Power

（1）　vibromotive force

（2）　H.F.OLSON and F.MASSA: “Applied Acoustics” Blakiston. Philadelphia,1934.

（3）　F.A.FIRESTONE: “ A New Analogy between Mechanical and Electrical Systems” J.A.S.A., Vol.4. p.249-256.1933.

（4）　mechanical impedance

気回路の場合と全く同様であって，その形は

(23)
$$Z^M = \frac{F}{\xi} = R^M - i\left(\omega M - \frac{K}{\omega}\right) = R^M - i X^M = \left| Z^M \right| e^{-i\varphi} \qquad (\mathrm{N{\cdot}s/m})$$

第 5・2 表 電気振動回路と機械振動系の対応.

| 機 械 振 動 系 | | 電 気 振 動 回 路 | | |
|---|---|---|---|---|
| 質　　量 | $M$ | インダクタンス | $L$ | 慣 性 要 素 |
| 機 械 抵 抗(5) | $R^M$ | 電 気 抵 抗 | $R^E$ | 抵 抗 要 素 |
| スティフネス | $K$ | | $\frac{1}{C}$ | 弾 性 要 素 |
| コンプライアンス(6) | $\frac{1}{K}$ | 容　　量 | $C$ | 弾 性 要 素 |
| 変　　位 | $\xi$ | 電　　荷 | $Q$ | |
| 速　　度 | $\dot{\xi}$ | 電　　流 | $I$ | |
| 起 振 力 | $F$ | 印加起電力 | $E$ | |
| 共鳴振動数 | $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$ | 共鳴振動数 | $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ | |

であり，単位を（N・s/m）と名付ける．その次元は cgs 系では

(24)
$$\left[Z^M\right] = \frac{\mathrm{dyne}}{\mathrm{cm/s}} = \frac{\mathrm{dyne}}{\mathrm{kine}} = \left[\frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{LT^{-1}}}\right] = \left[\mathrm{MT^{-1}}\right]$$

である．ただし

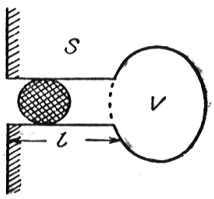
1 (kine) = 1　(cm/s)

である．国際単位系の単位を用いるときは

$$\left[Z^M\right] = \frac{\mathrm{newton}}{(\mathrm{m/s})} = \left[\mathrm{MT^{-1}}\right].$$

### 5・1・3　音響振動系

前に述べた電気振動回路および機械振動系と等価と見なし得る音響振動系は，波長に比較して寸法が小さい空洞に細い管を附加して外気と連絡したものと考えることができる．空洞の音響的性質は，4・6・5で述べておいたが，第5・4図のような音響系に対して，慣性要素，抵抗要素および弾性要素を求めてみよう．



第 5・4 図

図は容積 $V$ なる空洞が断面積 $S$ で長さ $l$ なる管によって外界と連絡しているものを示している．外から音波が侵入してきて，この空洞系を励振する場合の空洞の圧力増加は，空洞内流体の圧縮度(凝縮)を $s$ とし，体積変化を $dV$ とすれば，

(25)
$$\delta p = \rho_0 c^2 s = \rho_0 c^2 \frac{dV}{V} \qquad (\mathrm{Pa})$$

で与えられる．また空洞の細管(1)の寸法が波長に比して充分に小さいときには，管内の流体の管軸

(5)　mechanical resistance

(6)　compliance

(1)　空洞の頸ともいう．

方向の変位を $d\xi$ とすれば

(26)　$$dV = S\,d\xi\,.$$

よつて細管の断面に作用する力 $dF$ に上って空洞内の気体が $dV$ だけ圧縮されたとすると，力の平衡の式は

(27)　$$dF = S\,\delta p = \rho_0 c^2 \frac{S^2}{V} d\xi\,,$$

または積分して

(28)　$$F = \rho_0 c^2 \frac{S^2}{V}\xi \qquad \text{(N)}\,.$$

細管内の流体の質量は $\rho_0 lS$ であるから，この流体の運動によって生ずる力は

(29)　$$\rho_0 l S \frac{d^2\xi}{dt^2} \qquad \text{(N)}\,.$$

よって，もしも空洞に蓄えられた音響エネルギーが全く失われない場合には，空洞内の流体の運動は

(30)　$$\rho_0 l S \frac{d^2\xi}{dt^2} + \rho_0 c^2 \frac{S^2}{V}\xi = pS \qquad \text{(N)}$$

で表現される．ここに $p$ は外界から到来して空洞入口の細管の断面に作用する励振音の音圧である．

空洞内のエネルギーは実際にはかなりの損失があり，外部からの励振が止むと間もなく空洞の振動も消滅する．この損失の大部分は頸管内壁のマサツ損失および開口端より外界に輻射されるエネルギー損失に起因する．よって今，全エネルギー損失の時間平均値が（20）のように，

(31)　$$\overline{W} = \frac{1}{2}\left(R_A{}^M + R_i{}^M\right)\left|\frac{d\xi}{dt}\right|^2 = \frac{1}{2}R|\xi|^2 \qquad \text{(W)}$$

と表わされるものと仮定して等価損失抵抗 $R$ を求めてみる．ここに $R_A{}^M$ は輻射抵抗，$R_i{}^M$ は内部損失抵抗である．開口端から外部に輻射される音波は，遠方では半球面状の対称球面の形をしていると考えられるので，フラックスが $2S\xi$ なる呼吸球から輻射される音響エネルギーの半分を求めると

(32)　$$W^A = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0 c k^2}{8\pi}\left(2S|\xi|\right)^2\right] = \frac{\rho_0 c^2 k S}{4\pi}|\xi|^2 \qquad \text{(W)}$$

となるから（31）と（32）より輻射抵抗は

(33)　$$R_A{}^M = \frac{2\overline{W}^A}{|\xi|^2} = \frac{\rho_0 c k^2}{2\pi}S^2 = \frac{\rho_0 S^2}{2\pi c}\omega^2 = \frac{2\pi\rho_0 S^2}{c}v^2 \qquad \text{(N・s/m)}\,.$$

よって　$R_A{}^M + R_i{}^M = R_A{}^M(1+\mu)$ とおいて（30）に附加すれば，細管内の流体の運動方程式は[2]

(34)　$$\rho_0 l \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\rho_0 c k^2 S(1+\mu)}{2\pi}\frac{d\xi}{dt} + \rho_0 c^2 \frac{S}{V}\xi = p \qquad \text{(Pa)}\,.$$

外部音圧 $p$ が時間的に交番振動をするものとすれば，（34）は直ちに解くことができ，これより

---

(2) 内部損失抵抗 $R^M$ を理論的に決定することは困難であるが，$\left(R_A{}^M + R_i{}^M\right)$ を共鳴曲線の半値幅から実験的に求めることはできる．$\mu$ は1より大きい場合が多い．

比音響インピーダンスは

(35)
$$Z^A = \frac{p}{\xi} = \frac{\rho_0 c k^2}{2\pi} S\left(1+\mu\right) - i\left\{\omega \rho_0 l - \frac{\rho_0 c^2}{\omega}\frac{S}{V}\right\} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

となり，開口部の単位面積あたりの抵抗要素は

(36)
$$R^A = \frac{\rho_0 c k^2}{2\pi} S\left(1+\mu\right) = \frac{2\pi \rho_0 c}{\lambda^2} S\left(1+\mu\right) \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

慣性要素は
$$\mu = \frac{R_i{}^M}{R_A{}^M},$$

(37)
$$M^A = \rho_0 l \qquad (\mathrm{kg/m^2}),$$

弾性要素は

(38)
$$K^A = \rho_0 c^2 \frac{S}{V} \qquad (\mathrm{N/m^3})$$

なることがわかる．なお空洞の共振角速度は

(39)
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K^A}{M^A}} = c\sqrt{\frac{S}{V l}} \qquad (\mathrm{rad/s})$$

である．

空洞の音響インピーダンスを表現するのに，体積流 $\dot{\xi} S$ と音圧 $p$ とを用いる場合[3]あるが，ここでは（35）の形で比音響インピーダンスを定義しておく．したがって機械インピーダンスは

(40)
$$Z^M = S Z^A = \frac{S p}{\dot{\xi}} = \frac{F}{\dot{\xi}} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})$$

であり，比音響インピーダンスの単位は単位面積の機械インピーダンスの単位と等しくその次元は〔 $\mathrm{M L^{-2} T^{-1}}$〕となる．なお体積速度と力 $F$ とを用いて比音響インピーダンスを表現することもできる．

(41)
$$Z^A = \frac{F}{S\dot{\xi}} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}).$$

### 5・1・4　電気振動回路・機械振動系・音響振動系の対比

第二階定係数線型微分方程式を

(42)
$$a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d\xi}{dt} + c\xi = p(t),$$

(43)
$$a\frac{d\dot{\xi}}{dt} + b\dot{\xi} + c\int \dot{\xi}\, dt = p(t),$$

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}, \qquad p = p_0 e^{-i\omega t}$$

と書くと，この定常解は

(44)
$$\dot{\xi} = \frac{p}{Z},$$

(45)
$$Z = b - i\left(\omega a - \frac{c}{\omega}\right) = R - iX = |Z| e^{-i\varphi},$$

（3）　この場合音響インピーダンスの単位が（Pa・s/m³）となる．4・5・7，(139) 参照．

(46)　$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}\ , \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

第5・3表 電気振動回路・機械振動系・音響振動系の対照表.

| | 電気振動系 | 機械振動系 | 音響振動系 | |
|---|---|---|---|---|
| 等価振動系 | | | | |
| 慣性要素 $a$ | インダクタンス $L$ (H) | 質量 $M$ (kg) | 細管内の質量密度 $M^A = \rho_0 l$ (kg / m$^2$) (イナータンス) (1) | 細管内の質量 $M = \rho_0 S$ (kg) |
| 抵抗要素 $b$ | 電気抵抗 $R^E$ (Ω) | 機械抵抗 $R^M$ (N・s / m) | 音響抵抗 $R^A = \frac{2\pi\rho_0 c}{\lambda^2} S(1+\mu)$ (Pa・s / m) | 機械抵抗 $R^M = \frac{2\pi\rho_0 c}{\lambda^2} S^2(1+\mu)$ $(N \cdot s / m)$ |
| 弾性要素 $c$ | | スティフネス $K$ (N / m) | 音響スティフネス $K^A = \frac{\rho_0 c^2 S}{V}$ (N / m$^3$) | スティフネス $K = \frac{\rho_0 c^2 S^2}{V}$ $(N / m)$ |
| 〃 〃 $\frac{1}{c}$ | 容量 $C^E$ (F) | コンプライアンス $C^M$ (m / N) | 音響キャパシタンス $C^A = \frac{V}{\rho_0 c^2 S}$ (m$^3$ / N) | コンプライアンス $C^M = \frac{V}{\rho_0 c^2 S^2}$ (m / N) |
| 交番変数(尖頭値) $\xi$ | 電荷 $Q$ (C) | 変位 $\xi$ (m) | 変位 $\xi$ (m) | 変位 $\xi$ (m) |
| 交番変数(尖頭値) $\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ | 電流 $I$ (A) | 速度 $\dot{\xi}$ (m / s) | 粒子速度 $\dot{\xi}$ (m / s) | 粒子速度 $\dot{\xi}$ (m / s) |
| 交番外力(尖頭値) $p$ | 印加起電力 $E$ (V) | 印加起振力 $F^M$ | 音圧 $p$ (Pa) | 力 $F^A = pS$ (N) |
| リアクタンス $X$ | $X^E = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ (Ω) | 機械リアクタンス $X^M = \left(\omega M - \frac{K}{\omega}\right)$ (N・s / m) | 音響リアクタンス $X^A = \left(\omega\rho_0 l - \frac{\rho_0 c^2 S}{\omega V}\right)$ (Pa・s / m) | 機械リアクタンス $X^M = X^A S$ (N・s / m) |
| 共鳴振動数 | $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (Hz) | $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$ (Hz) | $\nu_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}}$ (Hz) | |
| 力率角 $\varphi$ | $\varphi = \tan^{-1}\left(X^E / R^E\right)$ | $\varphi = \tan^{-1}\left(X^M / R^A\right)$ | $\varphi = \tan^{-1}\left(X^A / R^A\right)$ | |
| エネルギー消費速度 | 消費電力 $\overline{W}^E = \frac{1}{2}\lvert I^2 \rvert R$ (W) | 消費エネルギー流 $\overline{W}^M = \frac{1}{2}\lvert \xi^2 \rvert R^M$ (W) | エネルギー流密度 $\overline{W} = \frac{\pi\rho_0 c S}{\lambda^2}\lvert \dot{\xi}^2 \rvert$ (W / m$^2$) | エネルギー流 $\overline{W} = \frac{1}{2}\lvert F \rvert \cdot \lvert \dot{\xi} \rvert \cos\varphi = \frac{1}{2}\lvert p \rvert \lvert \dot{\xi} S \rvert \cos\varphi = \frac{\pi\rho_0 c S^2}{\lambda^2}\lvert \xi \rvert^2$ (W) |
| インピーダンス $Z$ | 電気インピーダンス $Z^E = E/I$ | 機械インピーダンス $Z^M = F/\dot{\xi}$ | 比音響インピーダンス $Z^A = p/\dot{\xi}$ | 機械インピーダンス $Z^M = Z^A S$ |

(1) inertance

である．この場合の $a$，$b$，$c$，$\xi$，$\dot{\xi}$，$Z$，$R$，$X$，$|Z|$，$\varphi$ 等の各系に対する意味付けは第 5･3 表に示す通りである．

## 5・2　音響輻射系の音響輻射インピーダンス

振動体が流体内で振動する場合に，振動体が流体に及ぼす作用と流体が振動体に及ぼす反作用とを知ることは音響輻射の問題を究明するのに重要なことであるが，振動体の振動姿態が単純な場合を除いては正確に知ることが困難である．本節では振動姿態の単純な幾つかの場合について，流体が振動体に及ぼす反作用を輻射インピーダンスの形で表わす方法を述べておく．(1) この概念は電気音響学の基本概念として重要なものである．

### 5・2・1　呼吸球の輻射インピーダンス

呼吸球とは対称球面波を輻射する音源で，その大きさが有限のものをいう．第三章では対称球面波の音源として，点音源を説明しておいたが，半径 $a$ なる球面が，常に球形を保ったままで，ふくれたりしぼんだりして，微小の振動をする場合にはその周囲に対称球面波が輻射される．これはあたかも，$a$ なる球面を通して流体がその面の法線方向に噴出されたり，吸入されたりするのと等しい．このような音源を呼吸球(2) という．

呼吸球の輻射インピーダンスを求めるには，まずその周囲の流体内の音場を知らねばならぬ．呼吸球の中心を原点として球座線 $(r, \theta, \varphi)$ を用い，呼吸球の表面 $(r=a)$ の振動速度が $r$ 方向に $\dot{\xi}_{r0}\, e^{-i\omega t}$ の形に保たれているものと仮定して音場を求めてみる．周囲の音場は対称球面波と考えられるから音場内の任意の点の速度ポテンシャルは

(1)
$$\phi = \frac{A}{4\pi r} e^{ikr-i\omega t}\ .$$

これから導かれる粒子速度および音圧は

(2)
$$\dot{\xi}_r = \left(\frac{1}{r} - ik\right)\phi \qquad (\mathrm{m/s})\ ,$$

(3)
$$p = -i\omega\rho_0\phi \qquad (\mathrm{Pa})$$

である．(2) は $r=a$ にて $\dot{\xi}_{r0}\, e^{-i\omega t}$ とならねばならぬから

(4)
$$A = \frac{e^{-ika}}{1-ika} 4\pi a^2 \dot{\xi}_{r0}$$

であることを必要とし，(3) 呼吸球の周囲の音場は

(5)
$$\phi = \frac{a^2}{r}\dot{\xi}_{r0}\frac{1}{1-ika} e^{ik(r-a)-i\omega t}\ ,$$

---

(1)　4･2 参照．

(2)　pulsating　sphere

(3)　$4\pi a^2 \dot{\xi}_{r0}$ は呼吸球の表面を通る全体積速度 (m³/s) であり，これを呼吸球の強さと呼ぶ．

(6)
$$\dot{\xi}_r = \frac{a^2}{r^2}\dot{\xi}_{r0}\frac{1-ikr}{1-ika}e^{ik(r-a)-i\omega t},$$

(7)
$$p = -\rho_0 c\frac{a}{r}\xi_{r0}\frac{ika}{1-ika}e^{ik(r-a)-i\omega t}.$$

これらの形を電気回路理論にならって実効値[4]をもって示すことにすれば，速度ポテンシャルは

(8)
$$\dot{\Phi} = \frac{a^2}{r}\dot{\Xi}_{r0}\frac{e^{ik(r-a)}}{1-ika},$$

粒子速度は

(9)
$$\dot{\Xi}_r = \frac{a^2}{r^2}\dot{\Xi}_{r0}\frac{1-ikr}{1-ika}e^{ik(r-a)} \quad (\mathrm{m/s}).$$

音圧は

(10)
$$\dot{P} = -\rho_0 c\frac{a}{r}\dot{\Xi}_{r0}\frac{ika}{1-ika}e^{ik(r-a)} \quad (\mathrm{Pa}).$$

ただし

(11)
$$\left|\dot{\Xi}_{r0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\dot{\xi}_{r0}\right| \quad (\mathrm{m/s}),$$

音場の形が定まれば，呼吸球のすぐ外側の流体が呼吸球に及ぼす反作用は　$r=a$　の位顕の音場から計算することができ，流体が呼吸球表面に及ぼす反作用は（10）より

(12)
$$\dot{F}(a) = 4\pi a^2\cdot\dot{P} = -4\pi a^2\rho_0 c\dot{\Xi}_{r0}\frac{ika}{1-ika} \quad (\mathrm{N}).$$

呼吸球表面の速度は $\dot{\Xi}_{r0}$ であるから，呼吸球表面から流体を見た機械インピーダンスは

(13)
$$\begin{aligned} Z_A{}^M &= R_A{}^M - iX_A{}^M = \frac{\dot{F}(a)}{\dot{\Xi}_{r0}} = -4\pi a^2\rho_0 c\frac{ika}{1-ika} \\ &= S\rho_0 c\left(\frac{k^2a^2}{1+k^2a^2} - i\frac{ka}{1+k^2a^2}\right) = S\left(\frac{\frac{\omega^2a^2}{c^2}\rho_0 c}{1+\frac{\omega^2a^2}{c^2}} - i\frac{\omega\rho_0 a}{1+\frac{\omega^2a^2}{c^2}}\right) \\ &= S\left(R^A - iX^A\right) = SZ^A \quad (\mathrm{N\cdot s/m}) \end{aligned}$$

となる．ここに $S$ は呼吸球の表面積（m²），$\rho_0 c$ は蝶質の音響特性インピーダンス（Pa・s/m）であり，$Z^A$ は呼吸球の単位表面積あたりの比音響輻射インピーダンス（Pa・s/m）を示している．(13) の $Z_A{}^M$ すなわち　$SZ^A$ を呼吸球の輻射インピーダンスと呼び，単位は（N・s/m）であり，その実数部は輻射抵抗　$R_A{}^M$　（N・s/m），虚数部は輻射リアクタンス $X_A{}^M$　（N・s/m）であり，呼吸球の単位表

---

（4）　effective value, root mean square value

$$\dot{\Xi}_r = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}_r^{\,2}\,dt}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\mathrm{s})$$

大文字に下点を打って実効値を示す．　$\left|\dot{\Xi}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\dot{\xi}\right|$

（5）　radiation　resistance

面積に対する輻射抵抗 $R^A$ は比音響輻射抵抗（Pa・s/m），幅射リアクタンス $X^A$ は比音響輻射リアクタンス（Pa・s/m）である．比音響イソピーダンス $Z^A$ と空気の音響特性イン－ピーダンス $\rho_0 c$ との比

(14)
$$\zeta^A = \frac{Z^A}{\rho_0 c} = r^A - i x^A = \frac{\omega^2 a^2 \dfrac{\rho_0}{c} - i\omega\rho_0 a}{1 + \dfrac{\omega^2 a^2}{c^2}} \qquad (\text{数値}),$$

$$r^A = \frac{R^A}{\rho_0 c} = \frac{R_A{}^M}{S\rho_0 c},$$

$$x^A = \frac{X^A}{\rho_0 c} = \frac{X_A{}^M}{S\rho_0 c}$$

は煤質と音源および音場の形状によって定まる固有の値を示す．これを比音響インピーダンス比[(6)]という．

呼吸球から幅射されるエネルギー流は，その単位表面積につき

(15)
$$\bar{w} = \rho_0 c r^A \left|\dot{\Xi}_{r0}\right|^2 = \rho_0 c \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2}\left|\dot{\Xi}_{r0}\right|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2}),$$

全表面から輻射されるエネルギー流すなわち音響出力は

(16)
$$\bar{W} = R_A{}^M \left|\dot{\Xi}_{r0}\right|^2 = S\bar{w} \qquad (\mathrm{W})$$

である．すなわち輻射工ネルギー流は $(ka)^2 = (2\pi a/\lambda)^2$ によって左右され，呼吸球の半径 $a$ が一定であれば，波長の短かい音ほど幅射されやすく，したがって波長の長い音を充分に幅射するには半径 $a$ を大きくすることが必要となる．なお $R_A{}^M\left|\dot{\Xi}_{r0}\right|$ は音を輻射するのに必要な力の大きさを表わし，$X_A{}^M\left|\dot{\Xi}_{r0}\right|$ は音源の周囲の流体を加速するのに要する力の大きさを表わしており，$X_A{}^M$ を慣性係数[(7)]ともいう．

音響インピーダンスは媒質の音響特性インピーダンス $\rho_0 c$ によって大きく左右される．この値は煤質に固有の値であり，空気では大略 428 Pa・s/m，水の場合には約 $15 \times 10^6$ Pa・s/m であり，水の値は空気のそれの約 3400 倍となっている．したがって空気中の音響輻射の常識をもって水中音の輻射状態を想像することは非常な誤算の原因となる．

音響輻射インピーダンス（13）を

(16)
$$Z_A{}^M = R_A{}^M - i\omega M' \qquad (\mathrm{N{\cdot}s/m}),$$

$$R_A{}^M = \frac{\rho_0 c k^2 a^2}{1 + k^2 a^2} S \qquad (\mathrm{N{\cdot}s/m}),$$

$$M' = \frac{\rho_0 c k^2 a^2}{\omega\left(1 + k^2 a^2\right)} S = {}_0\rho_0 S \frac{a}{1 + k^2 a^2} = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{1 + k^2 a^2} \qquad (\mathrm{kg})$$

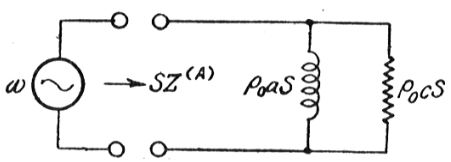
---

(6)　specific acoustic impedance ratio

(7)　inertia coefficient

と表わすと，$M'$は周囲の流体の反作用によって音源の振動部分の質量が見掛け上増加していることを示す量であり，これは附加質量[8]であって $ka \ll 1$ の場合には呼吸球の体機の 3倍の容積を占める流体の質量と等しい．

また音響輻射インピーダンス（13）と等価なインピーダンス函数を有する電気回路[9]は第5・5図のようなものである．これを等価回路と呼ぶ．なお呼吸球の比音響輻射抵抗および附加質量密度と周波数との関係は第5・6図に示してある．[10]




$$SZ^A = S\frac{\rho_0 c\dfrac{\omega^2 a^2}{c^2} - i\omega\rho_0 a}{1+\dfrac{\omega^2 a^2}{c^2}} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m}),$$

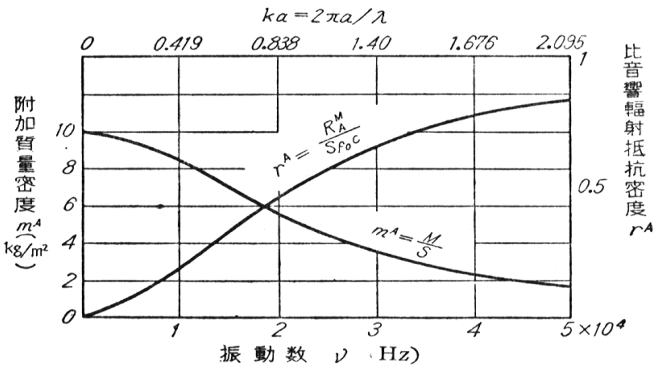
第 5·5 図　呼吸球の輻射インピーダンスの等価回路．

## 5・2・2 無限平面バッフル板を有するピストンの輻射インピーダンス

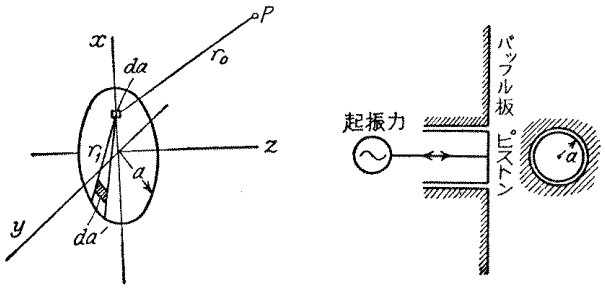
第5・7図のような無限に大きいバッフル板を備えたピストンが振動する場合の輻射インピーダンスを求めてみよう．バッフル板は理想的の剛体とし，音はその一方の側のみに輻射されるものとする．ピストンは円形でその半径が $a$(m) であり，ピストン面の中心を座標原点としてその法線を $z$ 軸とするとき，ピストン面の振動速度が $z$ 方向に $\dot{\xi}_{z0}e^{-i\omega t}$ で与えられているものとする．

ピストン面に接する媒質はピストン面と全く等しい運動をするものと考えれば，ピストン面上の $da$ なる微小面積から輻射される音波によって，これから $r_0$ だけ隔った点 $P$ に生ずる速度ポテンシャルの実効値は

(18)
$$d\dot{\Phi} = \frac{\dot{\Xi}_{z0}\,da}{2\pi r_0}e^{ikr_0}$$




半径 $a = 0.01$ (m) の呼吸球を水中においた場合．
$\rho_0 = 10^3$ (kg/m³), $c = 1500$ (m/s),
$\rho_0 c = 1.5\times10^6$ (音 Ω/m²).
第5・6図　呼吸球の輻射インピーダンスと周波数との関係（CRANDALL）．




第5・7図

---

(8)　aditional mass, 4・2・1および 4・2・4参照.

(9)　抵抗 $R$ とインダクタンス $L$ の並列回路のインピーダンスは

$$Z = \frac{\left(\omega^2 L^2/R\right) - i\omega L}{1+\left(\omega L/R\right)^2}$$ であるからら $L = \rho_0 aS$, $R = \rho_0 cS$.

(10)　平山(晃):”球状振源よりの音響輻射”信話誌, 1070～1087 頁, 1936 年.

であるから,[1] ピストンの全面からの輻射によって生ずる音場は

(19)
$$\dot{\Phi} = \frac{\dot{\Xi}_{z0}}{2\pi}\int_S \frac{e^{ikr_0}}{r_0}da$$

この音場のピストン面への反作用を求めるためにピストン面上の $da'$ なる微小面積上の圧力を計算すると

(20)
$$\dot{P} = -i\omega\rho_0\dot{\Phi}\Big]_{da'} = \frac{-i\omega\rho_0}{2\pi}\dot{\Xi}_{z0}\int_S \frac{e^{ikr_1}}{r_1}da$$

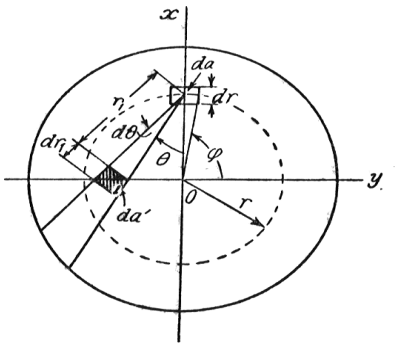
となる．ただし $r_1$ は $da$ から $da'$までの距離である．よってピストン面に作用する空気の反作用力の大きさは

(21)
$$\dot{F} = \int_s \dot{P}da' = \frac{-i\omega\rho_0}{2\pi}\dot{\Xi}_{z0}\int_S\left[\int_S \frac{e^{ikr_1}}{r_1}da\right]da'.$$

(21) の積分を評価するには次のように考える．$da$ と $da'$ は共にピストン面上にあり，かつその振動速度は等しいのであるから，$da$の部分の振動によって に生ずる力と $da'$ 部分の振動によって $da$ に生ずる力とは全く等しいと考えられる．よって（21）の積分を，まず $da'$ について積分し，次に $da$ について積分することにしても不都合は生じない．$da'$ について積分するにあたり，$da$を一定の位置に固定して考え，$r_1$ と $da'$ とを第 5·8 図のように取ると

(22)
$$da' = r_1 dr_1 d\theta,$$
$$da = r dr d\varphi$$

と表わされる．$da$ を一つの場所 $(r,\varphi)$ に固定しておけば $r_1$ と $\theta$ とは $(r,\varphi)$ から測ったピストン面上の座標である．$da$を固定しておいて $r_1$ と $\theta$ とについて全面にわたって積分し，次に $da$ を移動させて $r$ と $\varphi$ について全面にわたって積分すれば，(21) のニ重積分は計算されたことになり，この積分の結果は，面上のすべての点が2度ずつ積分されている．しかるに前に述べたように，$da$ の $da'$ に及ぼす影響と $da'$の $da$に及ぼす影響とは等しいのであるから，積分の操作をさらに簡単にすることができる．



第5・8図

$da$の位置 $(r,\varphi)$を固定しておき，この位置を原点として $r_1$ と $\theta$をもって面上のすべての位値を表わす場合に，半径 $r$なる円をもって表面を区切りこの円の内と外とを分けて考えてみる．まず円 $r$ の内部に $da'$ がある場合には $da$によって $da'$に与えられる影響は容易に計算することができるので，$da$によって円 $r$の表面に与えられる影響は計算することができる．$da'$が円 $r$ の外部にある場合には，積分が困難となるが，この場合には $da'$ が $da$ に及ぼす影響を求めれば前の円

（1） 片側のみの輻射を考え，かつ $\dot{\xi}_{r0}e^{-i\omega t}da$ なる強さの点音源から輻射される音場と考えて計算してある．ただし $da$ の寸法は波長に比して充分小さいものとする．

の内部にある場合と同じ形で計算することができる．したがって$da'$ が円 $r$ の外部に存在する場合を計算する代りに，$da'$が 円　$r$の内部にある場合のみをもって置換することができる．すなわち $da'$ は常に円 $r$ の内部にあるものとして，$da$ によって円 $r$ の表面に生ずる影響を計算し，次に $da$ をピストン面全部にわたって積分し，その得られた値を２倍すれば（21）の積分が計算される．この方法を用いて積分を行うために

(23)
$$I=\int_S \frac{e^{ikr_1}}{r_1} r_1\, dr\cdot d\theta$$

とおくと，円 $r$ の形は

(24)
$$r_1=2r\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<+\frac{\pi}{2}$$

で与えられるから

(25)
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} e^{ikr_1}\, dr_1\cdot d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} e^{ikr_1}\, dr_1\cdot d\theta$$
$$=\frac{2}{ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{i2kr\cos\theta}-1\right)d\theta$$
$$=\frac{-\pi}{ik}+\frac{2}{ik}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i2kr\cos\theta}\, d\theta\,.$$

(25) の第ニ項の積分は，指数函数を級数に展開して項別に積分すれば

(26)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i2kr\cos\theta}\, d\theta=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}(2kr)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4!}(2kr)^4+\cdots\right\}$$
$$+i\left\{2kr-\frac{2}{3\cdot 3!}(2kr)^3+\cdots\right\}$$

となる．ただし

(27)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\, dx=\frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2},\quad (n\text{は偶数}),$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\, dx=\frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n},\quad (n\text{は奇数})$$

を用いている．

（26）の実数部は BESSEL 函数 $\mathrm{J}_0(2kr)$ となるが虚数部は完全な BESSEL 函数とはならず，Lord RAYLEIGH は

(28)
$$\frac{\pi}{2}\mathrm{K}(z)=z-\frac{z^3}{1^2\cdot 3^2}+\frac{z^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}\cdots$$

と定義している．$\mathrm{K}(z)$ はBESSEL の微分方程式を満足しない．これらの函数を用いると（26）は

(29)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{+i2kr\cos\theta}\, d\theta=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{J}_0(2kr)+i\mathrm{K}(2kr)\right]$$

と書くことができ，(23) は

(30)
$$I=\frac{\pi}{k}\left[\mathrm{K}(2kr)+i\left\{1-\mathrm{J}_0(2kr)\right\}\right]$$

となる．

次に $da$ について積分するには

(31)
$$\int_S I\,da=\int_0^{2\pi}\int_0^a Ir\,dr\cdot d\varphi=2\pi\int_0^a Ir\,dr$$

を計算すればよいが，

(32)
$$\int_0^a \mathrm{J}_0(z)z\,dz=\left[z\mathrm{J}_1(z)\right]_0^a,$$

(33)
$$\int_0^a \mathrm{K}(z)z\,dz=\left[\mathrm{K}_1(z)\right]_0^a,$$

(34)
$$\mathrm{K}_1(z)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{3^2\cdot 5}+\frac{z^7}{3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdots\right),$$

$$\left[\mathrm{K}_1(z)\right]_{z\to\infty}=\frac{2\pi}{\pi}$$

を用いれば

(35)
$$\int_S I\,da=2\pi^2\left[\frac{1}{2k^3}\mathrm{K}_1(2ka)+i\frac{a^2}{k}\left(1-\frac{1}{ka}\right)\mathrm{J}_1(2ka)\right],$$

よって（35）の２倍を用いて（21）を計算すると

(36)
$$\begin{aligned}\dot{F}&=\pi\omega\rho_0\dot{\Xi}_{z0}\left[\frac{a^2}{k}\left\{1-\frac{1}{ka}\mathrm{J}_1(2ka)\right\}-\frac{i}{2k^3}\mathrm{K}_1(2ka)\right]\\&=\left[\pi a^2\rho_0 c\left\{1-\frac{1}{ka}\mathrm{J}_1(2ka)\right\}-i\omega\frac{\pi\rho_0}{2k^3}\mathrm{K}_1(2ka)\right]\dot{\Xi}_{z0}\end{aligned}$$

となる．これより輻射インピーダンスを求めると

(37)
$$\begin{aligned}Z_A{}^M&=\pi a^2\rho_0 c\left\{1-\frac{1}{ka}\mathrm{J}_1(2ka)\right\}-i\omega\frac{\pi\rho_0}{2k^3}\mathrm{K}_1(2ka)\\&=R_A{}^M-i\omega M'\qquad(\mathrm{N\cdot s/m})\end{aligned}$$

となる．

$ka\ll 1$　なる範囲では，輻射抵抗は

(38)
$$R_A{}^M\approx\pi a^2\rho_0 c\frac{k^2a^2}{2}=\rho_0 c\frac{k^2S^2}{2\pi}=2\pi\rho_0 c\frac{S^2}{\lambda^2}\qquad(\mathrm{N\cdot s/m})$$

となり，これは呼吸球が半無限空間に輻射するときの輻射抵抗と等しい．(2) 附加質量は

(39)
$$M'\approx\frac{\pi\rho_0}{2k^3}\frac{2(2ka)^3}{3\pi}=\frac{8}{3}a^2\rho_0=\frac{8}{3}\rho_0\left(\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\approx 0.48\rho_0 S^{\frac{3}{2}}$$

となる．(3) 一方同じ面積の呼吸球の半面輻射の場合の附加質量は

---

（2）　呼吸球の輻射インピーダンスにて　$S=2\pi a^2$　とおく．これは呼吸球にバッフルを附加した場合に相当する．

（3）　無限大バッフル板つきピストンの付加質量は円板の片面の付加質量の　$1/\pi$ に等しい．4・2・4 参照．

(40)
$$M_0{}' \approx 2\pi a_0{}^2 \cdot \rho_0 a_0 = \rho_0 \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.40\,\rho_0 S^{\frac{3}{2}}$$

であるから，

(41)
$$M' : M_0{}' = 0.48 : 0.40$$

となり，バッフル板つきのピストンの方が呼吸球より低周波における附加質量が 20% ほど大きい．

周波数が大きくなって，$ka$ が1より大きくなると，附加質量 $M'$ は輻射抵抗 $R_A{}^M$ に比して非常に小さくなり，その値は

(42)
$$M' \approx \frac{\pi \rho_0}{2k^3} \cdot \frac{4ka}{\pi} = \frac{\rho_0 \lambda^2}{2\pi^2} a = \frac{\rho_0 \lambda^2}{2\pi^2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

となる．一方呼吸球の場合には

(43)
$$M_0{}' \approx \frac{\rho_0 \lambda^2}{2\pi} a = \frac{\rho_0 \lambda^2}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

となる．

呼吸球とピストンの輻射インピーダンスを比較するために両者の比音響インピーダンス比

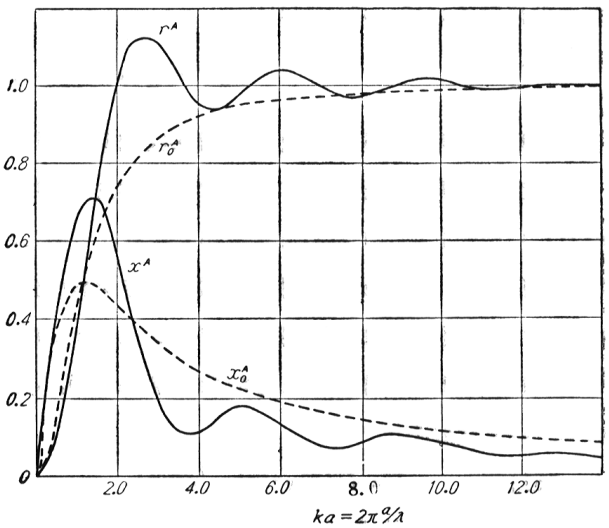
(44)
$$\zeta = \frac{Z_A{}^M}{\rho_0 c S} = r^A - i x^A$$
$$= \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} - i \frac{K_1(2ka)}{2k^2 a^2} \right],$$

(ピストン)，

(45)
$$\zeta_0 = \frac{Z_{A0}{}^M}{\rho_0 c S_0} = r_0{}^A - i x_0{}^A$$
$$= \left[ \frac{k^2 a_0{}^2}{1 + k^2 a_0{}^2} - i \frac{k a_0}{1 + k^2 a_0{}^2} \right],$$

(呼吸球)

を $ka$ を横軸として，図示すると，第5・9図のようになる．ただしピストンの半径 $a$ と呼吸球の半径との間には $S = \pi a^2 = 1.39\pi a_0{}^2$ なる関係を保たせてある．(4)




第5・9図　ピストンおよび呼吸球の輻射インピーダンス
(CRANDALL).

### 5・2・8 二重音源の輻射インピーダンス

波長に比べて小さし剛体球が，流体内で $x$ 軸方向に $U_0 e^{-i\omega t}$ なる振動速度で振動している場合に生ずる音場は4・2・2で述べてある．このような音源はニ重音源と考えられ，その輻射エネルギー流は4・2・2の(21)より

(46)
$$\overline{W} = \frac{\pi}{6} \rho_0 c k^4 a^6 U_0{}^2 \qquad \text{(W)}$$

(4)　5·3·4の（125）参照．$\frac{1}{\sqrt{1.39}} = 0.85$

であり，また球が周囲の流体から受ける反作用力の大きさは4・2・2の（10）より

(47)
$$F' = +i\omega\frac{2}{3}\pi a^3 \rho_0 U_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{(N)}$$

である．

この球の振動を持続させるために，外から加えねばならぬ力の大きさは，

(48)
$$F = -F' = -i\omega\frac{2}{3}\pi a^3 \rho_0 U_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{(N)}$$

と考えられるが，これから求める輻射イソビーダンスは $-i\omega\frac{2}{3}\pi\rho_0 a^3$ なる純虚数の質量リアクタンスとなり，輻射エネルギー流を代表すべき実数部の輻射抵抗を含んでいない．事実，（48）の形は第一近似として成立する力の平衡関係であって，（46）の輻射エネルギー流に関係する起振力の大きさは（48）に比して無視し得る程度である．よって，輻射抵抗 $R_A{}^M$ と輻射エネルギー流との間に

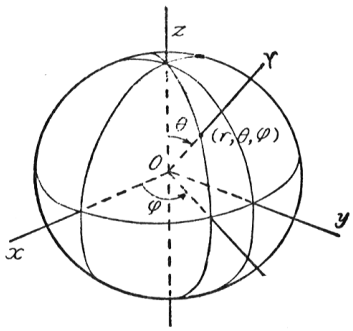
(49)
$$\overline{W} = \frac{1}{2}R_A{}^M \left| U_0 \right|^2 \qquad \text{(W)}$$

なる関係が成立しているものと考えて（46）より輻射抵抗を求め，第二近似の補正を加えると，二重音源の輻射インピーダンスは[1]

(50)
$$Z_A{}^M \approx \frac{1}{3}\pi\rho_0 c k^4 a^6 - i\omega\frac{2}{3}\pi a^3 \rho_0 \qquad \text{(N・s/m)}.$$

### 5・2・4 球帯状分割振動をする球面からの輻射音場およびその輻射インピーダンス

球の表面の振動速度分布が任意の形である場合の音源の輻射インピーダンスおよび音場の形は4・2・7の結果を用いて求めることができる．しかしここでは問題を単純化して，半径 $a$ なる球の表面の径方向速度分布が座標 $\theta$ のみの函数で表わされるような場合の音場の一般解を求めてみる．



第5・10図　球座標.

座標系を球の中心を原点とした球座標 $(r, \theta, \varphi)$ とし，球表面の径方向速度分布を

(51)
$$U = U(\theta)e^{-i\omega t} \qquad \text{(m/s)}$$

とすると，分布函数 $U(\theta)$ は球帯調和函数を用いて表わすことができ，4・2・7 の（141）にて $\varphi$ の函数を定数とおいて

(52)
$$U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta),$$

ここに

$$U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} U(\theta)\cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot \sin\theta \cdot d\theta .$$

一方このような音源から輻射される音場の速度ポテンシャルは4・2・7 の（148）より

（1）　3・5・5参照.

(53)
$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,\mathrm{P}_n\left(\cos\theta\right)\left[\mathrm{J}_n\left(kr\right)+i\,\mathrm{n}_n\left(kr\right)\right]e^{-i\omega t}$$

と表わされ，$A_n$と $U_n$との関係は球表面~~い~~ ($\cancel{r=0}$) の音場の速度成分を知ることによって求められる．

球表面上の音場の速度は（53）より

(54)
$$\dot{\xi}_r\left(a\right)=-\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]_{r=a}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k\,A_n\,\mathrm{P}_n\left(\cos\theta\right)}{2n+1}\Big[\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)\right\}$$
$$+i\left\{n\,\mathrm{n}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{n}_{n+1}\left(ka\right)\right\}\Big]e^{-i\omega t}\qquad(\mathrm{m/sec})$$

と表わされるから，（54）が（51）に等しいとおけば

(55)
$$A_n=\frac{-\left(2n+1\right)U_n}{k\Big[\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)\right\}+i\left\{n\,\mathrm{n}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{n}_{n+1}\left(ka\right)\right\}\Big]}$$
$$=\frac{+i\left(2n+1\right)U_n\sin\delta_n\cdot e^{i\delta_n}}{k\Big[n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)\Big]}$$

ただし[1]

(56)
$$\tan\delta_n=\frac{n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)}{n\,\mathrm{n}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{n}_{n+1}\left(ka\right)}$$

よって（51）のような速度分布を有する球状音源の周囲の音場は

(57)
$$\phi=\frac{i}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)U_n\cdot\mathrm{P}_n\left(\cos\theta\right)\cdot e^{i\delta n}\sin\delta_n\cdot\left[\frac{\mathrm{j}_n\left(kr\right)+i\,\mathrm{n}_n\left(kr\right)}{n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)}\right]e^{-i\omega t}\ ,$$

(58)
$$p=-i\omega\rho_0\phi\ ,$$

(59)
$$\dot{\xi}_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}\ ,$$
$$\dot{\xi}_\theta=-\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ ,$$
$$\dot{\xi}_\varphi=0\ ,$$

ただし．球面 BESSEL 函数の微分は 4・2・7 の（117）により

(60)
$$\frac{d}{dr}\Big[\mathrm{j}_n\left(kr\right)+i\,\mathrm{n}_n\left(kr\right)\Big]$$
$$=\frac{k}{2n+1}\Big[\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(kr\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(kr\right)\right\}+i\left\{n\,\mathrm{n}_{n-1}\left(kr\right)-\left(n+1\right)\mathrm{n}_{n+1}\left(kr\right)\right\}\Big]$$

であり，LEGENDRE 函数の微分は[2]

(61)
$$\frac{d}{d\theta}\Big[\mathrm{P}_{n+1}\left(\cos\theta\right)\Big]=\frac{d}{d\theta}\Big[\mathrm{P}_{n-1}\left(\cos\theta\right)\Big]-\left(2n+1\right)\mathrm{P}_n\left(\cos\theta\right)\cdot\sin\theta\ ,$$

---

（1）
$$\frac{\sin\delta_n\cdot e^{i\delta_n}}{\Big[n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)\Big]}=\frac{-i}{\Big[n\,\mathrm{j}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{j}_{n+1}\left(ka\right)\Big]+i\Big[n\,\mathrm{n}_{n-1}\left(ka\right)-\left(n+1\right)\mathrm{n}_{n+1}\left(ka\right)\Big]}.$$

（2） Eugen JAHNKE und Fritz EMDE; "Functionen Tafelen mit Formeln und kurven" S.183. B.G.Teubner,Leipzig.1933.

$$\frac{d\,\mathrm{P}_0}{d\,\theta}=0\,,$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}_1}{d\,\theta}=-\sin\theta\,,$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}_2}{d\,\theta}=-\frac{3}{2}\sin 2\theta\,,$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}_3}{d\,\theta}=-6\sin\theta+\frac{15}{2}\sin^3\theta\,,$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}_4}{d\,\theta}=-5\sin 2\theta+\frac{35}{4}\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta\,,$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}_5}{d\,\theta}=-15\sin\theta+\frac{105}{2}\sin^3\theta-\frac{315}{8}\sin^5\theta\,,$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{P}_6}{d\,\theta}=-\frac{21}{2}\sin 2\theta+\frac{189}{4}\sin^2\theta\cdot\sin 2\theta-\frac{693}{16}\sin^4\theta\cdot\sin 2\theta\,,$$

$$\frac{\partial\,P_7}{\partial\,\theta}=-28\sin\theta+189\sin 3\theta-\frac{693}{2}\sin^5\theta+\frac{3003}{16}\sin^7\theta\,.$$

音源から遠くはなれた点における音場は

(62) $$\mathrm{j}_n(kr)+i\,\mathrm{n}_n(kr)=\mathrm{h}_n^{(1)}(kr)\underset{kr\to 8}{\Rightarrow}(-i)^{n+1}\frac{e^{ikr}}{kr}$$

を用いて簡単な形で表わすことができ，

(63) $$\varphi=\frac{e^{ikr-i\omega t}}{k^2 r}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)U_n\,\mathrm{P}_n(\cos\theta)\frac{\sin\delta_n\cdot e^{i\delta n}}{\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\}}\,,$$

(64) $$\left.\begin{aligned}p&=-\frac{\rho_0 c}{kr}\cdot\\ \xi_r&=-\frac{1}{kr}\cdot\end{aligned}\right\}e^{ikr-i\omega t}\sum_{n=0}^{n}(-i)^{n-1}(2n+1)U_n\,\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\frac{\sin\delta_n\cdot e^{i\delta n}}{\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\}}\,.$$

よって，音源から $r$ なる距離のエネルギー流密度の時間平均値は

(65) $$\begin{aligned}w&=\frac{1}{2}\Re e\left(p\cdot\tilde{\xi}_r\right)\\ &=\frac{\rho_0 c}{2}\frac{1}{(kr)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)\cdot(2m+1)\cdot U_n\cdot U_m\cdot\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\mathrm{P}_m(\cos\theta)\\ &\quad\cdot\frac{\sin\delta_n\cdot\sin\delta_m\cdot\cos\left\{\delta_n-\delta_m-\dfrac{(n-m)\pi}{2}\right\}}{\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\}\left\{m\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(m+1)\mathrm{j}_{m+1}(ka)\right\}}\quad(\mathrm{W/m^2})\,,\end{aligned}$$

半径 $r$ なる球面を貫いて流出する全ネネルギー流は

(66) $$\begin{aligned}\overline{W}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{w}\,r^2\sin\theta\cdot d\,\theta\cdot d\,\varphi\\ &=\frac{2\pi a^2\rho_0 c}{k^2 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot\sin^2\delta_n\cdot U_n^{\,2}}{\left[n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right]^2}\quad(\mathrm{W})\,.\end{aligned}$$

この結果を見ると，任意の振動をする球の近傍では音場の粒子速度は径方向成分ばかりでなく角方向成分も有し，かつ粒子速度の位相は音圧の位相と一致していないが，音源から充分遠方の音場の粒子速度はほとんど径方向成分だけとなり，かつ音圧と同位相となることが理解できる．

もしも球の半径が波長に比して充分に小さい場合には $ka \ll 1$ となるので4・2・7の（109）と（110）を用いれば[3]（66）の $n$ の級数は第一項のみで充分となり，遠方の音場のエネルギー流は

(67)
$$\overline{w} \approx \frac{\rho_0 c}{2}\frac{(ka)^4}{(kr)^2}U_0{}^2 = \frac{\rho_0 c k^2 a^2}{2r^2}U_0{}^2 \qquad (\mathrm{W/m^2}),$$

(68)
$$\overline{W} \approx 2\pi\rho_0 c k^2 a^4 U_0{}^2 \qquad (\mathrm{W})$$

と表わされる．この結果は，球の振動姿態がどうであっても，長い波長の音響を輻射する場合には，音源は点音源とみなすことができることを示している．この場合の点音源の強さは$4\pi a^2 U_0{}^2$である．ただし，球の振動姿態が$U_0 = 0$となるような場合は例外であって，このようなときには，音源は $4\pi a^2 U_1$ なる強さの二重音源とみなさねばならない．

振動する球の輻射インピーダンスを求めるには，速度分布函数（52）の$n$ について1項ずつ求めねばならない．球表面が$U_n$ なる振動姿態で振動しているときに球表面の $\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_s$ なる位置に $s$ 本の節線か生じて球を $(s+1)$ 球帯に分割していたものとすると，音場が球表面に及ぼす力の実効値は

(69)
$$\dot{F}_n = \sum_{s=0}^{s+1}\int_0^{2\pi}\int_{\theta_{s-1}}^{\theta_2} \mathrm{P}_n(a)a^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$
$$= -i\omega\rho_0 2\pi a^2 \sum_{s=0}^{s+1}(-1)^s \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \dot{\Phi}_n(a)\sin\theta \cdot d\theta,$$

ここに

(70)
$$\dot{\Phi}_n(a) = -\frac{(2n+1)U_n \mathrm{P}_n(\cos\theta)\left[\mathrm{j}_n(ka) + i\,\mathrm{n}_n(ka)\right]}{k\left[\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\} + i\left\{n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\mathrm{n}_{n+1}(ka)\right\}\right]},$$

(71)
$$\theta_0 = 0, \qquad \theta_{s+1} = \pi$$

である．よって輻射インピーダンスは

(72)
$$Z_{An}{}^M = \frac{\dot{F}_n}{\dot{U}_n} = -i\omega\rho_0 \frac{2\pi a^2}{U_n}\sum_{s=0}^{s+1}(-1)^s \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \dot{\Phi}_n(a)\sin\theta \cdot d\theta.$$

球の半径に比して波長が長い場合には $ka \ll 1$ であるから，$ka$ の 2次の微少量を省くと

(73)
$$\dot{\Phi}(a) \approx \frac{U_0}{k}\frac{ka}{1 - ika}$$

とかけるので，輻射インピーダンスは

---

（3）　$\mathrm{j}_n(z) \underset{z\to 0}{\Rightarrow} \dfrac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$，　$\mathrm{n}_n(z) \Rightarrow -\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{z^{n+1}}$.

(74)
$$Z_A{}^M \approx -4\pi a^2 \rho_0 c \frac{ika}{1-ika} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})$$

となり（13）と一致する．

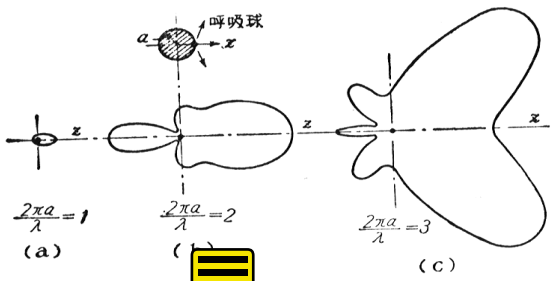
### 5・2・5　剛体球表面上の点音源およびピストンの輻射インピーダンス

前節の結果を用いて，半径 $a$ なる球の表面に置かれた点音源の輻射インピーダンスを求めることができる．剛体球面上にある点音源を数学的に表現するには，球面上の点音源のある位置が $z$ 軸上にあるように座標系を定め，球面上の速度分布函数（52）が $\delta=0$ の近傍の半径 $\delta$ なる微小円形面積の範囲内でのみ値を有し他の場所では $U(\theta)=0$ となるように $U_n$ を選べばよい．微小円形領域の振動速度が一定速度 $\dot{\xi}_{z0}e^{-i\omega t}$ に保たれているものとすると，速度分布函数の形は

(75)
$$U(\theta)=\begin{cases}\dot{\xi}_{z0}, & \left(0\le\theta\le\dfrac{\delta}{a}\right),\\ 0, & \left(\dfrac{\delta}{a}<\theta\le\pi\right)\end{cases}$$

でなければならぬ．よって[1]（52）より

(76)
$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\dot{\xi}_{z0}\int_0^{\delta/a}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot d\theta$$
$$\underset{\delta\to 0}{\Rightarrow}\frac{1}{4}(2n+1)\dot{\xi}_{z0}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2,$$




第 5・11図　半径 $a$ なる球の表面に置かれた一点音源から輻射されるエネルギー流密度の指向特性（MORSE）．

したがって（55）より

(77)
$$A_n=\frac{-\dfrac{1}{4}(2n+1)^2\left(\dfrac{\delta}{a}\right)^2\dot{\xi}_{z0}}{k\left[\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\}+i\left\{n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{n}_{n+1}(ka)\right\}\right]}.$$

音源から速く離れた点のエネルギー流密度は（65）より

(78)
$$\overline{w}=\frac{\rho_0 c}{32}\frac{\delta^4}{a^4}\frac{\dot{\xi}_{z0}{}^2}{k^2r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2n+1)^2\cdot(2m+1)^2\,\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\mathrm{P}_m(\cos\theta)$$
$$\cdot\frac{\sin\delta_n\cdot\sin\delta_m\cdot\cos\left\{\delta_n-\delta_m-\dfrac{(n-m)\pi}{2}\right\}}{\left\{n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka)-(n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)\right\}\left\{m\,\mathrm{j}_{m-1}(ka)-(m+1)\mathrm{j}_{m+1}(ka)\right\}}\qquad(\mathrm{W/m^2}),$$

1)　$P_n(1)=1$.

半径 $r$ なる球面を貫いて流れる全エネルギー流は

(79)
$$\overline{W} = \rho_0 c \frac{\pi \delta^4}{8a^2} \frac{\dot{\xi}_{z0}{}^2}{k^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 \sin^2 \delta_n}{\left[ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right]^2} \qquad \text{(W)}.$$

なお，全エネルギー流およびエネルギー流密度の指向特性を第5・11図に示しておく．

このような音源の輻射インピーダンスは点音源上に作用する音場の反作用力と振動速度との比から求められる．(70) と (76) より

(80)
$$\dot{\Phi}_n(a) = -\frac{1}{4k} \frac{(2n+1)^2 \mathrm{P}_n(\cos\theta)\left[ \mathrm{j}_n(ka) + i\,\mathrm{n}_n(ka) \right] \dot{\Xi}_{z0}}{\left[ \left\{ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\} + i \left\{ n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{n}_{n+1}(ka) \right\} \right]}$$

(81)
$$\dot{F}_n = -i\omega\rho_0 2\pi a^2 \int_0^{\delta/a} \Phi_n(a) \sin\theta \cdot d\theta$$
$$\approx -i\omega\rho_0 \frac{\pi a^2}{2k} \dot{\Xi} \frac{\delta^2}{2a^2} \frac{(2n+1)\left[ \mathrm{j}_n(ka) + i\,\mathrm{n}_n(ka) \right]}{\left[ \left\{ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\} + i \left\{ n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{n}_{n+1}(ka) \right\} \right]}$$

であるから，輻射インピーダンスは

(82)
$$Z_A{}^M = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \dot{F}_n}{\dot{\Xi}_{z0}}$$
$$= -i\rho_0 c \frac{\pi \delta^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 \left[ \mathrm{j}_n(ka) + i\,\mathrm{n}_n(ka) \right]}{\left[ \left\{ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\} + i \left\{ n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{n}_{n+1}(ka) \right\} \right]} \qquad \text{(N・s/m)}.$$

点音源の代りに，剛体球表面上にピストンのある場合には，ピストンの中心点の法線が $z$ 軸となるように座標軸を定め，球の中心からピストンを見た角を $\theta_0$ とすると，速度分布函数は

(83)
$$U(\theta) = \begin{cases} \dot{\xi}_{z0}, & (0 \le \theta < \theta_0), \\ 0, & (\theta_0 < \theta \le \pi) \end{cases}$$

を満足せねばならぬ．よって

(84)
$$U_n = \frac{1}{2}(2n+1)\dot{\xi}_{z0} \int_{\cos\theta_0}^{1} \mathrm{P}_n(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\xi}_{z0}\left[ \mathrm{P}_{n-1}(\cos\theta_0) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta_0) \right]$$

となるから，輻射音場のエネルギー流密度と輻射エネルギー流は (65) と (66) より容易に求まる．また輻射インピーダンスは

(85)
$$Z_A{}^M = R_A{}^M - i\,X_A{}^M \qquad \text{(N・s/m)},$$

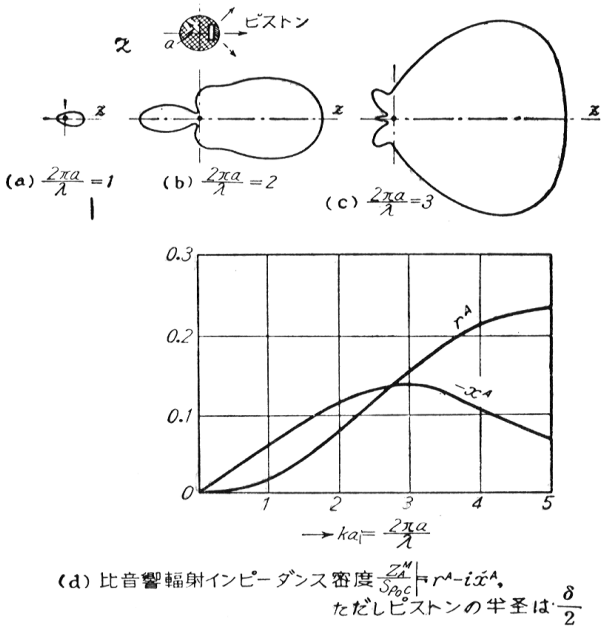
$$R_A{}^M = \frac{\pi\rho_0 c}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \mathrm{P}_{n-1}(\cos\theta_0) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta_0) \right]^2}{\left\{ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\}^2 + \left\{ n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\}^2}$$

$$X_A{}^M = \pi a^2 \rho_0 c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \mathrm{P}_{n-1}(\cos\theta_0) - \mathrm{P}_{n+1}(\cos\theta_0) \right]^2 \left[ \mathrm{j}_n(ka)\sin\delta_n + \mathrm{n}_n(ka)\cos\delta_n \right]}{\left\{ n\,\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\}^2 + \left\{ n\,\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\,\mathrm{j}_{n+1}(ka) \right\}^2}$$

であり，輻射エネルギー流は

$$\overline{W} = \frac{1}{2} R_A{}^M \left| \dot{\xi}_{z0} \right|^2 \qquad \text{(W)} \tag{86}$$

である．第5・12図にはこの音源の輻射インピーダンスを示しておく．なお剛体球以外に円筒，偏長回転楕円体(2)または偏平回転楕円体(3)等について同様のことがらを調べた結果(4)が報告されているがここでは省いておく．




第 5・12 図　年径 $a$なる球の表面に置かれた半径　$\delta/2$ なるピストンから輻射されるエネルギー流密度の指向特性と比音響輻射インピーダンス（MORSE）．

## 5·3　音 響 伝 送 系

音響伝送系として考察の対象となるものは音響管とホーン(ラッパ)とである．有限長の管が共鳴器として利用されるのに対し，長い管は伝声管として古くから実用に供されている．ホーンとは，その断面積が長さの方向に次第に増加または減少する管のことである．前者は音響輻射系と組合わせて，後者は集音器として，広く使用されていたことは特筆すべきことであろう．これらのホーンは音を伝送するという役目の外に，音源と，それを取りまく媒質とのインピーダンスを整合し能率のよい輻射をするのに重要な役割を演じている．このようなホーンの作用が理論的に明らかにされたのは，極めて近世のことであり，音響理論のもたらした一つの成果である．

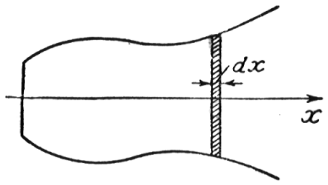
(2)　prolate　spheroid

(3)　obrate　spheroid

(4)　T.NIMURA and　Y.WATANABE: “Sound Radiation from a Zonal Radiators”　The Reports of the Research　Institute of Elec. Comm. Tohoku Univ., Vol.5, No.3, 4, March,1953.

## 5・3・1　ホーンの基本的性質

断面積 $S$ が長さの方向に測った距離 $x$ の函数であるような管があり，その太さは管内を伝わる音波の波長に比して充分小さいものとすると，管内の流体の微小な運動は $x$ が一定なる断面上ではすべて位相が等しく，かつその運動方向は $x$ 方向と考えて差支えない．このような管内の流体の $x$ 方向の変位を $\xi$ とすると，流体の連続方程式は



第 5・13 図　一般的なホーン．

(1)
$$S(x)\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\dot{\xi}\right]=0$$

と書くことができる．ここに $s$ は凝縮(または圧縮度)である．ここで

(2)
$$s=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t},$$
$$\dot{\xi}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

とおけば，(1) は速度ポテンシャル $\phi$ で表わされ

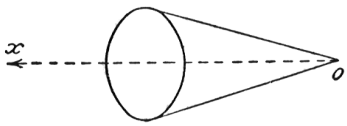
(3)
$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{c^2}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]=0,$$

または形を変えて

(4)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln S(x)\right].$$

これは WEBSTER[1]によって始めて導かれたので WEBSTER のホーンの一般式という．この方程式は一般には解けなしが，$S$ の函数形が簡単な場合には解を得る．その例を次に示す．

(1)　円錐ホーン[2]　第 5・14 図のような円錐形のホーンの中を頂点 $o$ から $x$ の正方向に伝播する音場を考えてみよう．コーンの頂角を立体角 $\Omega$ で表わすと，任意の位置 $x$ におけるホーンの断面積は



第 5・14 図 円錐ホーン．

(5)
$$S=\Omega x^2 \qquad (\mathrm{m}^2)$$

であるから

(6)
$$\ln S=\ln\Omega+2\ln x,$$

(7)
$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln S)=\frac{2}{x}$$

となり，(4) は

---

(1)　A.G.WEBSTER :"Acoustic Impedance and Theory of Horns and phonograph" Proc. Nat. Acad.Soc., p.275.5,1919.

(2)　conical horn
K.SATO : "On the Acoustical Properties of Conical Horns" I. II. Rep. Aero. Res. Inst.,Vol.4, No.42, p.1-19.1929; Vol.5, No.54.p. 261-285, 1930.

(8) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2c^2}{x}\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

これを変形すると

(9) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x\phi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\phi)$$

となるので，時間因数が $e^{-i\omega t}$ なる持続交番振動の場合には

(10) $$\phi = \left(\frac{A}{x}e^{ikx} + \frac{B}{x}e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t},$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

を得る．この第一項は $x$ の正方向に進行する外向発散波，第二項は $x$ の負方向に進行する内向収束波である．この結果より，原点 $O$ に $A$ なる強さの点音源のある場合の外向発散波は，対称球面波の音場の形にならって

(11) $$\phi = \frac{A}{\Omega x}e^{ikx-i\omega t}$$

と書くことができる．

この結果は RAYLEIGH[3] によって求められたものであり，ホーンを用いない．対称球面波の場合には $4\pi$ なる立体角内に輻射されるのに対して，ホーンを有する場合には $\Omega$ なる立体角内に輻射されるので音場が $4\pi/\Omega$ 倍に強められることを示している．メガホーンを用いると1方向にのみ音が強く輻射されるのはこの理由により説明される．しかしホーンからの輻射能率を高めるには頂角 $\Omega$ を小さくすることが必要であるが，頂角が小さくなるとホーンの形は円筒管に近づき，開口端における反射波の影響が顕著に現われ，共振現象を呈するようになる．そのため開きの少ないメガホーンから輻射される音は大きな音ではあるが，不明瞭な音となる．

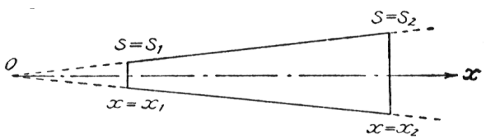
開口端の反射を無視するために，非常に長い円錐ホーンを考え，ホーンの頂点から $x_1$ の距離の点にてコーンを切断し，この断面上にピストン運動をする音源を置いてみる．音源の振動速度の実効値を $\dot{\Xi}_0$ と表わすと，(11) より

(12) $$\dot{A} = S_1\dot{\Xi}_0\frac{e^{-ikx_1}}{1-ikx_1} = S_1\dot{\Xi}_0\frac{1+ikx_1}{1+k^2x_1^2}e^{-ikx_1} \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

であればよい．ここに $S_1$ は $x_1$ の位置のコーンの断面積

(13) $$S_1 = \Omega x_1^2$$

であり，$S_1\dot{\Xi}_0$ はピストン運動をする音源の強さを表わす量である．よって長いホーン内の音場は



第 5.15 図 円錐ホーンの振動端および閉口端を示す．

(14) $$\dot{\Phi} = \frac{S_1\dot{\Xi}_0}{\Omega x}\frac{1+ikx_1}{1+k^2x_1^2}e^{ik(x-x_1)},$$

(3) Lord RAYLEIGH : "Theory of souod" II. 280.

(15)
$$\dot{P} = -i\omega\rho_0\dot{\Phi} = \frac{\omega\rho_0 S_1 \dot{\Xi}_0}{\Omega x}\frac{k x_1 - i}{1 + k^2 x_1^2} e^{ik(x - x_1)} \qquad \text{(Pa)},$$

(16)
$$\dot{\Xi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1 - ikx}{x}\dot{\Phi} \qquad \text{(m/s)}$$

となる．

次にこのホーンのインピーダンスを求める．まずホーン内の $x$ なる位置の断面より $x$ の正方向を見た比音響インピーダンスは[4]

(17)
$$Z^A = \frac{\dot{P}}{\dot{\Xi}} = \frac{-i\omega\rho_0 x}{1 - ikx} = \frac{-i\rho_0 ckx}{1 - ikx}$$
$$= \rho_0 c\frac{k^2 x^2 - ikx}{1 + k^2 x^2} \qquad \text{(Pa・s/m)}$$

となり，比音響インピーダンスは場所 $x$ の函数であることが示される．円錐ホーンを有するピストンの輻射インピーダンスを求めるには，$x = x_1$ の位置から右を見た送端インピーダンスがわかればよく，その値は

(18)
$$S_1 Z_1^A\Big]_{x1} = S_1\rho_0 c\frac{k^2 x_1^2 - ikx_1}{1 + k^2 x_1^2} \qquad \text{(N・s/m)}$$

である．この結果は呼吸球の輻射インピーダンス5・2・1の (13) の $4\pi a^2$ の所を $S$ と置いたものに等しい．よってこの等価回路は第 5.16 図のようになる．

音源から輻射されるエネルギー流は

(19)
$$\overline{W} = \Re e\left(Z_1^A S_1\right)\left|\dot{\Xi}_0\right|^2 = S_1\rho_0 c\frac{k^2 x_1^2}{1 + k^2 x_1^2}\left|\dot{\Xi}_0\right|^2 = \frac{\left|S_1\dot{\Xi}_0\right|^2}{\Omega x_1^2}\rho_0 c\frac{k^2 x_1^2}{1 + k^2 x_1^2} \qquad \text{(W)},$$

ホーン内の $x$ なる位置の音場のエネルギー流密度は

(20)
$$\overline{w} = \Re e\left(Z^A\right)\left|\dot{\Xi}\right|^2 = \rho_0 c\frac{k^2 x^2}{1 + k^2 x^2}\left|\dot{\Xi}\right|^2$$
$$= \rho_0 c\frac{k^2 x_1^2}{1 + k^2 x_1^2}\frac{S_1}{S}\left|\dot{\Xi}_0\right|^2$$
$$= \rho_0 c\frac{k^2}{1 + k^2 x_1^2}\frac{\left|S_1\dot{\Xi}_0\right|^2}{\Omega^2 x^2} \qquad \text{(W/m}^2\text{)}$$

なお長いホーンから輻射される全エネルギー流は (19) であると考えられる．

音場の瞬時値を求めるには $\dot{\Xi}_0$ の代りに $\dot{\xi}_0 e^{-i\omega t}$ とおき，(14) の実数部を計算すればよい．[5] すなわち $\left|\dot{\xi}_0\right|\cos\left(\omega t - \varphi\right)$ に対する音圧は

---

(4) これは $x$ なる位置から右を見た特性インピーダンスであるが，無限に長いホーンの場合には，駆動点インピーダンスと考えてもよい．

(5) $\left|\dot{\Xi}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\dot{\xi}_0\right|$.

(21)
$$\dot{P} = \frac{\omega\rho_0\left|\dot{\xi}\right|S_1}{\Omega x}\,\frac{k x_1 \cos\left\{k\left(x-x_1\right)-\omega t+\varphi\right\}+\sin\left\{k\left(x-x_1\right)-\omega t+\varphi\right\}}{k^2 x_1^{\,2}+1}$$
$$= \frac{\omega\rho_0\left|\dot{\xi}_0\right|S_1}{\Omega x\sqrt{k^2 x_1^{\,2}+1}}\cos\left\{k\left(x-x_1\right)-\omega t-\theta+\varphi\right\},$$
$$\tan\theta = \frac{1}{k x_1}.$$

これより輻射エネルギー流を計算すれば（19）と等しいことが示される．（20）を見ると，長い円錐ホーン内を伝播する音場について次のことがらが示されている．

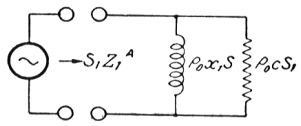
（i）一定位置 $x_1$ に一定の強さの音源 $\left|S_1\dot{\Xi}_0\right|$ のある場合にホーンの閉口部附近の音の強さは $\Omega^2$ に反比例する．

（ii）低周波 $\left(k x_1 < 1\right)$ においてはエネルギー流密度は周波数の平方に比例して低音が弱められる．

（iii）高周波においては，エネルギー流密度はピストンの面積 $\Omega x_1^{\,2}$ で定まる一定値に漸近する．

（iv）$x_1$ を大きくすると周波数特性が平坦になる．

なお第 5・17 図にこれらの性質の一例を示しておく．[6]



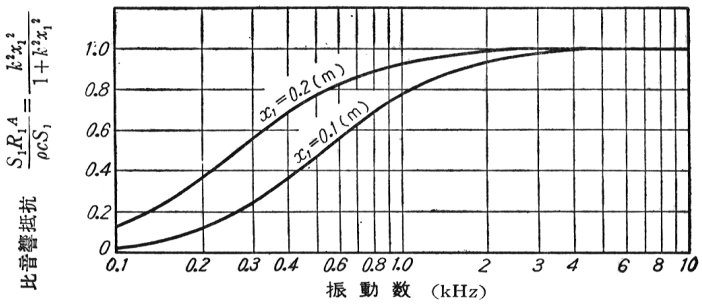

$$S_1 Z_1^{\,A} = S_1\frac{\dfrac{\rho_0 c\,\omega^2 x_1^{\,2}}{c^2} - i\omega\rho_0 x_1}{1+\dfrac{\omega^2 x_1^{\,2}}{c^2}} \quad (\mathrm{N\cdot s/m})$$

第5・16図　無限に長い円錐ホーンの送端インピーダンスの等価回路．

（2）ベッセルホーン　（4）が解きうる一つの形として，断面が

(21)
$$S = S_1\left[\alpha\left(x-x_1\right)+1\right]^n$$

の形で変化する場合が知られている．ここに $S_1$ は $x_1$ の位置の断面積である．この場合には（4）の解は BESSEL 函数で表わされるので，ベッセルホーン[7]と呼ばれている．




第5・17図　無限に長い円錐ホーンの送端から見た音響抵抗と送端位置との関係．

すなわち

(22)
$$\ln S = \ln S_1 + n\ln\left[\alpha\left(x-x_1\right)+1\right],$$

(23)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln S\right] = \frac{n\alpha}{\alpha\left(x-x_1\right)+1}$$

であるから，（4）は

(24)
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{n\alpha}{\left[\alpha\left(x-x_1\right)+1\right]}\frac{\partial\phi}{\partial x} + k^2\phi = 0.$$

---

（6）CRANDALL:"Theory of Vibrating System and Sound" p.156. D.Van Nostrand Co.,New York, 1926.

（7）C.R.HANNA:" On the Propagation of Sound in the General BESSEL Horn of Infinite Length" J.F.I., Vol.214, p.849, 1927.

ここで

(25) $$\alpha\left(x-x_1\right)+1=u$$

とおくと，(24) は

(26) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\frac{n}{u}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{k^2}{\alpha^2}\phi=0$$

となり．この解は

(27) $$\phi=u^{-\frac{n-1}{2}}\mathrm{Z}_{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(-\frac{k}{\alpha}u\right)$$

である．[8] ここに $\mathrm{Z}_p\left(x\right)$は円筒函数であり，外向発散波を表現するためには

(28) $$\mathrm{Z}_p\left(x\right)=A\mathrm{H}_p^{(1)}\left(x\right)$$

であることが必要であり，(27) は

(29) $$\phi=\frac{A}{\left[\alpha\left(x-x_1\right)+1\right]^{(n-1)/2}}\mathrm{H}^{(1)}{}_{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(-k\left[x-x_1\right]-\frac{k}{\alpha}\right),$$

ただし

(30)
$$\mathrm{H}^{(1)}{}_{\frac{1}{2}}\left(z\right)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz},\qquad \mathrm{H}^{(2)}{}_{\frac{1}{2}}\left(z\right)=i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz},$$
$$\mathrm{H}^{(1)}{}_{-\frac{1}{2}}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz},\qquad \mathrm{H}^{(2)}{}_{-\frac{1}{2}}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz},$$
$$i^{n+1}\mathrm{H}^{(1)}{}_{n+\frac{1}{2}}\left(z\right)=i^{-n}\mathrm{H}^{(2)}{}_{-n-\frac{1}{2}}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-z}\mathrm{S}_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{2z}{i}\right),$$
$$i^{n+1\cdot 5}\mathrm{H}^{(1)}{}_{n+\frac{1}{2}}\left(iy\right)=i^{(-n-05)}\mathrm{H}^{(2)}{}_{-n-\frac{1}{2}}\left(iy\right)=\sqrt{\frac{2}{xy}}e^{-y}S_{n+\frac{1}{2}}\left(2y\right),$$
$$\mathrm{S}_{1\cdot 5}\left(2y\right)=1+\frac{1}{y},$$
$$\mathrm{S}_{2\cdot 5}\left(2y\right)=1+\frac{3}{y}+\frac{3}{y^2},$$
$$\mathrm{S}_{3\cdot 5}\left(2y\right)=1+\frac{6}{y}+\frac{15}{y^2}+\frac{15}{y^3},$$
$$\mathrm{S}_{4\cdot 5}\left(2y\right)=1+\frac{10}{y}+\frac{45}{y^2}+\frac{105}{y^3}+\frac{105}{y^4},$$
$$\mathrm{S}_{5\cdot 5}\left(2y\right)=1+\frac{15}{y}+\frac{105}{y^2}+\frac{420}{y^3}+\frac{945}{y^4}+\frac{945}{y^5}$$

---

(8) $\frac{d^2v}{dz^2}-\frac{2p}{z}\frac{dv}{dz}-c^2v=0$ の解は $v=z^{\left(p+\frac{1}{2}\right)}Z_{\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(ciz\right)$,

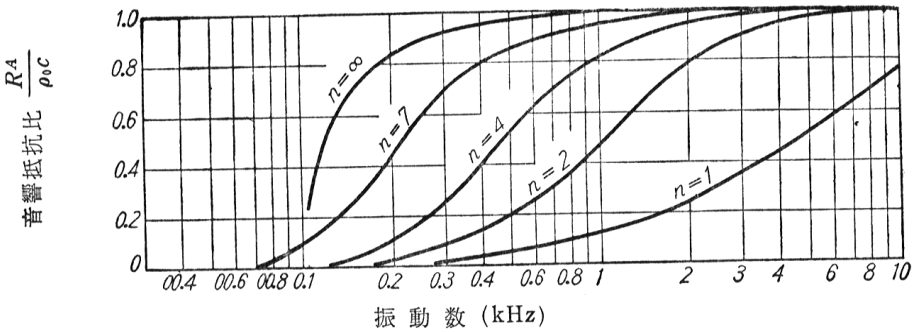
$Z_p\left(u\right)$ は円満函数: (Watson:Theory of BesseI Function, p.25)

$$Z_p\left(u\right)=\omega_1\left(P\right)\mathrm{J}_p\left(u\right)+\omega_2\left(P\right)\mathrm{Y}_p\left(u\right)$$
$$=\omega_3\left(P\right)\mathrm{H}_p^{(1)}\left(u\right)+\omega_4\left(P\right)\mathrm{H}_p^{(2)}\left(u\right).$$

G.N.WATSON: ”A Treatise on the Theory of BESSEL Functions”p.25, Cambridge Press, 1922.

である.[9]

ベッセルホーンの音響抵抗は，$n$ の小さい範囲では周波数特性が悪く，$n$を大きくすると次第に低い周波数までよく輻射するようになる．これは第 5・18図に示してある.




第 5・18 図 ベッセルホーンの音響抵抗比の例 [HANNA].

(3) 指数ホーン[10]　ベッセルホーンの指数 $n$を無限大にした極限を取ると (21) は

(31)
$$S = S_1 e^{m(x-x_1)}$$

となる[11]. このホーンは断面積が指数 $e^{m(x-x_1)}$ に比例して増大するので指数ホーンと呼ばれている.

指数ホーンに対する WEBSTER の基本式は

(32)
$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + m\frac{d}{dx} + k^2\right)\phi = 0$$

となるので，ホーン内の音場は

(33)
$$\dot{\Phi} = e^{-\beta x}\left(\dot{A}e^{i\alpha x} + \dot{B}e^{-i\alpha x}\right),$$

(34)
$$\alpha = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{m}{2k}\right)^2},$$

$$\beta = \frac{m}{2}, \qquad k = \frac{\omega}{c}.$$

無限に長い指数ホーンの場合には，開口端からの反射波は考える必要がないので

(35)
$$\dot{B} = 0$$

と考えてよく，この場合のホーン内の音圧と粒子速度は

(36)
$$\dot{P} = -i\omega\rho_0\dot{\Phi} = -i\omega\rho_0\dot{A}e^{-\left(\frac{m}{2}-i\alpha\right)x} \qquad (\mathrm{N/m^2}),$$

---

(9) JANKE-EMDE: “Functionen Tafeln” 前掲.

(10) exponential horn

(11)
$$\left\{1+\alpha\left(x-x_1\right)\right\}^n = \left\{1+\frac{n\alpha\left(x-x_1\right)}{n}\right\}^n,$$
$$\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{a}{x}\right\}^x = e^a,$$
$$\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{n\alpha\left(x-x_1\right)}{n}\right\}^n = e^{na\left(x-x_1\right)} = e^{m\left(x-x_1\right)}.$$

(37)
$$\dot{\Xi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{m}{2} - i\alpha\right) \dot{A} e^{-\left(\frac{m}{2} - i\alpha\right)x} \qquad (\mathrm{m/s}).$$

したがってホーン内の任意の断面 $x$ から外向を見た特性インピーダンスは

(38)
$$Z^A = \frac{\dot{P}}{\dot{\Xi}} = \frac{-i\omega\rho_0}{\frac{m}{2} - i\alpha} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2k}\right)^2} + i\frac{m}{2k}}$$
$$= \rho_0 c \left(\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2k}\right)^2} - i\frac{m}{2k}\right) \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m}).$$

よって指数ホーンのインピーダンスは場所 $x$ にかかわらず一定値を取り，かつその値は $m/2k$ の函数である．

音源に接続する指数ホーンの輻射インピーダンスの等価回路を（38）から直接求めるのは困難であるが，音源の接続する位置 $x_1$ の断面積を $S_1$ とすると，（38）より $x_1$ の位置の送端インピーダンス~~と~~は

(39)
$$S_1 Z_1{}^A = S_1 \rho_0 c \left(\sqrt{1 - \left(\frac{mc}{2\omega}\right)^2} - i\frac{mc}{2\omega}\right)$$

と書けるから，$i\omega$ の行動に注目すると，第 5・19図(a)のような電気回路の $L - R^E$ 並列回路のインピーダンス

(40)
$$Z^E = \frac{\omega^2 L^2 R^E - i\omega L R^{E^2}}{R^{E^2} + \omega^2 L^2} \qquad (\Omega)$$

において $R^E \ll \omega L$ とした場合の形

(41)
$$Z^{E'} = \left[R^E - i\frac{R^{E^2}}{\omega L}\right]$$

と（39）とが似ている．よって指数ホーンも $R^E - L$ 並列回路で表現される可能性が予想される．よって（40）を変形し

(42)
$$Z^E = \frac{R^E - i\frac{R^{E^2}}{\omega L}}{1 + \frac{R^{E^2}}{\omega^2 L^2}}$$

とし，これと（39）とを等しいとおくと

(43)
$$R^E = \frac{\rho_0 c S_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mc}{2\omega}\right)^2}},$$
$$L = \frac{2\rho_0}{m} S_1$$

となる．よって指数ホーンの送端インピーダンスの等価回路は $R^E$ と $L$ との並列接続によって表わすことができる．[12]

(12)　得られた結果が $R^E$ は音響抵抗の単位，$L$ は質量の単位を持っているから~~特価~~回路が実現できる．

(38) において

(44) $$\frac{m}{2k}=\frac{mc}{2\omega}=1$$

となるような周波数を指数ホーンの遮断周波数と呼び

(45) $$v_c=\frac{\omega_c}{2\pi}=\frac{mc}{4\pi}\qquad(\mathrm{Hz})$$

で与えられる．長い指数ホーンのインピーダンスは $v_c$ よりも低い周波数に対して実数部が消滅する

ホーン設計図表

$m=\dfrac{4\pi vc}{c}=0.03696v_c$ ,

$v_c$ ・・・・遮断周波数,

$x$ ・・・・ホーンの長さ,

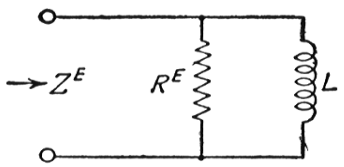
$S_0$ ・・・・ホーン咽喉部断面積 $(m^2)$

Exponential Horn:

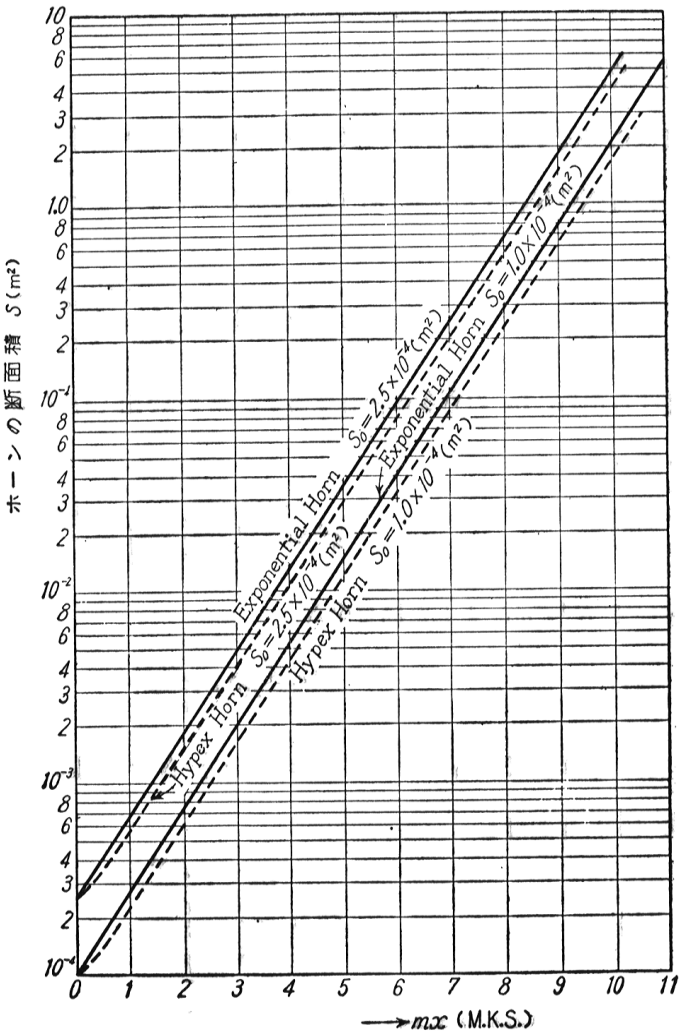
$$S(x)=S_0e^{mx}$$

Hypex Horn:

$$S(x)=S_0\left(Cos\,mx+0.6Sin\,mx\right).$$




第 5・19 図 (a) 指数ホーンの等価回格.




第 5・19図 (b) 指数ホーン設計図表.

ので，このような低い音はホーン内を伝播し得ない (輻射エネルギー流が消滅す)．常温における $v_c$ を求めるために

$c=340m/s$ とすれば

(46) $$v_c=\frac{340}{4\pi}m=27.2m\qquad(\mathrm{Hz})$$

となり， $m=4$ のときは， $v_c=108.8$ Hzである．第 5・19図は $v_c$が与えられたときに指数ホー

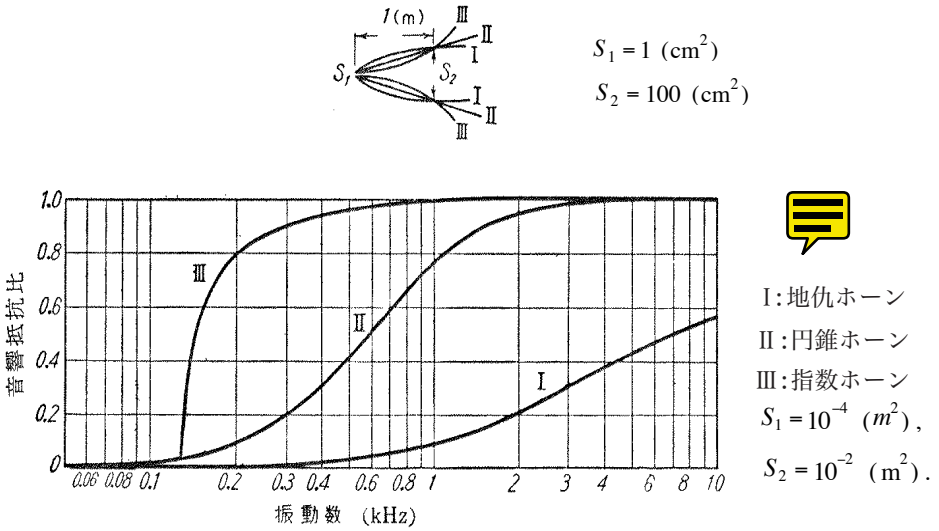
ンの形を定めるのに便利な図表である．この図表には指数ホーンを改良した Hypex Horn の図表も示されている．

(d)　放物ホーン

断面の形が

(47)　$$S : S_1 = x : x_1$$

にしたがって変化するようなホーンは放物線形となるので放物ホーン[13]と呼ばれる．このホーンは特性がよくないので実用に供されない．第 5・20 図に円錐ホーン，指数ホーン，放物ホーンの比較を示す．




第 5・20 図 無限に長い放物ホーン(Ⅰ)と円錐ホーン(Ⅱ)および指数ホーン(Ⅲ)の送端から見た音響抵抗の比較.

## 5・3・2　音　響　管

断面の形およびその寸法が管軸上の至る所で一定な管を音響管と呼ぶ．断面の形は円形の場合が多い．このような管の，直裁断面上の至る所で音圧が一様であるような場合には，管内には軸方向に進行する平面波が伝播すると考えられるが，[1]これと同じ結果が WEBSTER の式にて

(48)　$$\frac{d}{dx}(\ln S) = 0 \qquad \text{(断面の形状が一定)}$$

と置いても得られる．すなわち音響管の内部では

(49)　$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\phi = 0$$

(13)　parabolic horn
八木(秀次)："音響科学" 153 頁．オーム社，1939 年.

(1)　3・2・5 参照
断面の寸法か波長に比して小さい場合である.

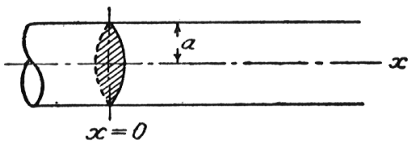
が成立する．したがって音場の形は

(50)　$$\dot{\Phi} = A e^{ikx} + B e^{-ikx},$$

(51)　$$\dot{P} = -i\omega\rho_0 \dot{\phi} = -i\omega\rho_0 \left( A e^{ikx} + B e^{-ikx} \right),$$

(52)　$$\dot{\Xi} = -\frac{d\dot{\Phi}}{dx} = -ik \left( A e^{ikx} - B e^{-ikx} \right),$$

ここに $A$ と $B$ は管の始端および終端の条件によって定められる定数である．今 $x=0$ なる断面上の音圧が $\dot{P}_1$，速度が $\dot{\Xi}_1$ と与えられている場合を考えると，(51)(52) より $A$ と $B$ が定められ



第 5･21 図

(53)　$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \frac{i}{2}\left( \frac{\dot{P}_1}{\omega\rho_0} + \frac{\dot{\Xi}_1}{k} \right) = \frac{i}{2k}\left( \frac{\dot{P}_1}{\omega\rho_0} \pm \dot{\Xi}_1 \right),$$

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

よって管内の任意の位置の音場は

(54)　$$\dot{P} = \dot{P}_1 Cos\,\theta + \dot{\Xi}_1 \rho_0 c\, Sin\,\theta \qquad (\mathrm{Pa}),$$

(54)　$$\dot{\Xi} = \dot{\Xi}_1 Cos\,\theta + \frac{\dot{P}_1}{\rho_0 c} Sin\,\theta \qquad (\mathrm{m/s}),$$

ただし

(55)　$$\theta = +ikx = i\frac{\omega}{c}x = i\frac{2\pi}{\lambda}x \qquad (\mathrm{rad})$$

は $x=0$ 断面から $x$ 断面までの区間の~~位品~~角[3]である．管の断面積を $S$ とし，全断面に作用する力を

(56)　$$\dot{F} = S\dot{P} \qquad (\mathrm{N})$$

とすれは，(53) と (54) とより

(57)　$$\dot{F} = \dot{F}_1 Cos\,\theta + \dot{\Xi}_1 S\rho_0 c\, Sin\,\theta \qquad (\mathrm{N}),$$

(58)　$$\dot{\Xi} = \dot{\Xi}_1 Cos\,\theta + \frac{\dot{F}_1}{S\rho_0 c} Sin\,\theta \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．これらの形は電気回路の分布定数線路の電圧電流の伝播式と全く同形であるため，電気回路系と音響管系との結合を論ずるのに重要な式である．[4] また管内を伝播する音波に僅かの減衰がある場合には

---

(2)　$e^{\pm\theta} = Cos\,\theta \pm Sin\,\theta$

(3)　position angle

(4)　黒川（兼三郎）：“音的負荷が受話器に及ぼす影響について” 電学誌，41 巻，578～603 頁，1921 年．

(58)
$$k=\alpha+i\beta\,,\qquad \alpha\gg\beta\,,$$
$$\theta=ikx=\left(-\beta+i\alpha\right)x=-\left(\beta-i\alpha\right)x$$

とおいて（57）を適用することができる．この結果から音響管の機械インピーダンスは $S\rho_0 c$ (N･s/m)，特性インピーダンス[5]は $\rho_0 c$ (Pa･s/m) であることがわかる．

このように音響管の中の音場および音響インピーダンスを電気回路の概念で理解するには双曲線函数で表わすのが都合がよい．よって（50）にて

(59)
$$-\frac{B}{A}=e^{-2\psi}$$

とおき

(60)
$$\dot{\Phi}\left(x\right)=A\,e^{-\psi}\left[e^{\psi+ikx}-e^{-\psi-ikx}\right]=2\,\dot{\Phi}_0^{(+)}\,e^{-\psi}\,Sin\left(\psi+ikx\right),$$

(61)
$$\dot{P}\left(x\right)=-i\omega\rho_0\,2\,\dot{\Phi}_0\,Sin\left(\psi+ikx\right)=2\,\dot{P}_0^{(+)}\,e^{-\psi}\,Sin\left(\psi+ikx\right)$$

(62)
$$\dot{\Xi}\left(x\right)=-ik\,2\,\dot{\Phi}_0\,e^{-\psi}\,Cos\left(\psi+ikx\right)=\frac{2\,\dot{P}_0^{(+)}}{\rho_0 c}e^{-\psi}\,Cos\left(\psi+ikx\right)$$

と変形すると，$x$断面から $+x$方向を見た管の比音響インピーダンスは

(63)
$$Z^A\left(x\right)=\frac{\dot{P}\left(x\right)}{\dot{\Xi}\left(x\right)}=\rho_0 c\,Tan\left(\psi+ikx\right)\qquad \text{(Pa･s/m)}$$

と表わされる．ここに $\psi$ は管の終端から $+x$ 方向を見た音響回路の位置角であって，終端の反対係数に関係した量であり，多くの場合複素数となる．よって

(64)
$$\psi+ikx=\pi\left(\sigma+i\mu\right)$$

とおくと

(65)
$$\sigma=\frac{1}{\pi}\Re e\left(\psi\right)-\beta x\,,$$
$$\mu=\frac{1}{\pi}\left[\Im m\left(\psi\right)+\alpha x\right],$$
$$\alpha=\frac{\omega}{c}\gg\beta$$

と表わされる．よって音場に関する諸量は次のようになる．[6]

比音響インピーダンス：

(66)
$$Z^A\left(x\right)=\rho_0 c\,Tan\left[\pi\left(\sigma+i\mu\right)\right]=R^A-iX^A\qquad \text{(Pa･s/m)}\,,$$

---

（5）　characteristic impedance, 波動イソビーダソスと同じ．

（6）　$Cos^2 x-Sin^2 x=1\,,\qquad \cos^2 x+\sin^2 x=1\,,$

$Cos^2 x+Sin^2 x=Cos\,2x\,,\qquad \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x\,,$

$2\,Cos\,x\cdot Sin\,x=Sin\,2x\,,\qquad 2\cos x\cdot\sin x=\sin 2x\,.$

$$R^A = \frac{\rho_0 c\, Sin\, 2\pi\sigma}{Cos\, 2\pi\sigma + \cos 2\pi\mu} \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m}),$$

$$X^A = \frac{-\rho_0 c \sin 2\pi\mu}{Cos\, 2\pi\sigma + \cos 2\pi\mu} \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m}),$$

音圧：

(67)
$$\dot{P}(x) = \sqrt{2}\, \dot{P}_0^{(+)} e^{-\pi\beta} \sqrt{Cos\, 2\pi\sigma - \cos 2\pi\mu} \qquad (\mathrm{pa}).$$

粒子速度：

(68)
$$\dot{\Xi}(x) = \sqrt{2}\, \frac{\dot{P}_0^{(+)}}{\rho_0 c} e^{-\pi\beta} \sqrt{Cos\, 2\pi\sigma - \cos 2\pi\mu} \qquad (\mathrm{m/s}),$$

エネルギー流密度：

(69)
$$\overline{w} = \frac{\dot{P}_0^{(+)2}}{\rho_0 c}\left(1 - e^{-4\pi\sigma}\right) \qquad (\mathrm{W/m^3}),$$

エネルギー密度：

(70)
$$\overline{E} = \frac{\dot{P}_0^{(+)2}}{\rho_0 c^2}\left(1 + e^{-4\pi\sigma}\right) \qquad (\mathrm{J/m^3}),$$

なお（66）の $\sigma$，$\mu$ と $R^A/\rho_0 c$，$X^A/\rho_0 c$ との変換を行うには，第 5・22 図を利用すればよい．なお複素変数双曲線函数の図表は KENNELLY の図表を参照されたい．

管の終端 $(x = l)$ に任意のインピーダンス $Z_2{}^A$ (Pa･s/m) の音響回路が接続されている場合には，第 5・23 図に示すように $x = l$ なる断面上に作用する力および粒子速度をそれぞれ $\dot{F}_2$ および $\dot{\Xi}_2$ とすると，境界条件は

(71)
$$\frac{\dot{F}_2}{\dot{\Xi}_2} = S Z_2{}^A \qquad (\mathrm{N \cdot s/m})$$

と表わされるが，これはまた（63）より

(72)
$$Z^A(l) = \rho_0 c\, Tan\left(\varphi + i k l\right) = Z_2{}^A \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

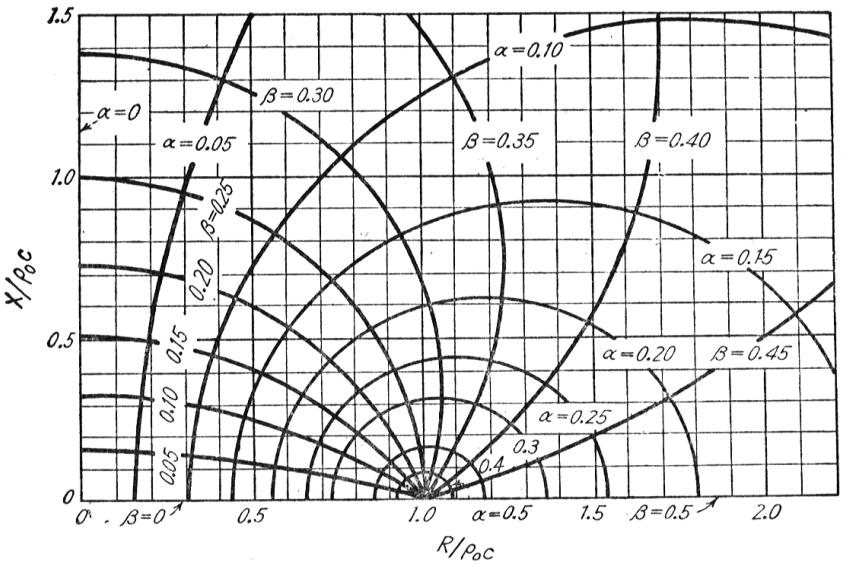
と表わすことができる．これより $x = l$ なる断面上より $+x$ 方向を見た位置角は

(73)
$$\phi = i k l + Tan^{-1}\left[\frac{Z_2{}^A}{\rho_0 c}\right] = -i k l + Tan^{-1}\left[\frac{Z_2{}^A}{Z_0{}^A}\right],$$

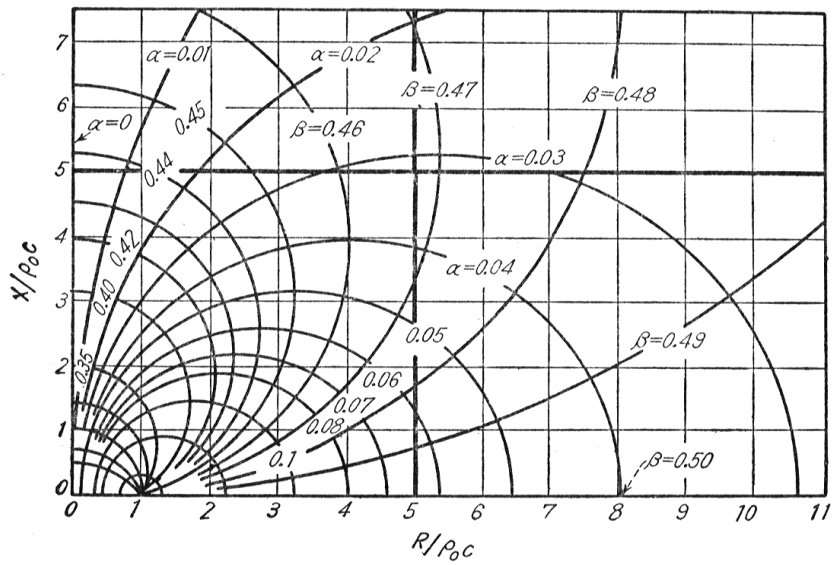
よって管内から $+x$ 方向を見たインピーダンス密度は（63）より

(74)
$$Z^A(x) = \rho_0 c\, Tan\left[i k (x - l) + Tan^{-1}\left(\frac{Z_2{}^A}{\rho_0 c}\right)\right] \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

（7）　A.E.KENNELLY: ”Chart Atlas,Complex Hyperbolic and circular Functions” Cambridge Harvard Univ. Press,London 1924.




（a）




（b）

図の縦軸には $x^A = X^A / \rho_0 c$ ，縦軸には $r^A = R^A / \rho_0 c$ が目盛られ，$\alpha$ と $\beta$ とをパラメータとして解を求めることかできる．

【例】　$\alpha = 0.1$，$\beta = 0.2$ は $r^A = 0.45$，$x^A = 0.62$ と対応す．

$\beta'$ が 0.5 と 1 との間にある場合には $\rho_0 c\, Tan\left[\pi\left(\alpha + i - i\beta'\right)\right] = R^A - i X^A$ を用いて $\beta = \left(1 - \beta'\right)$ とおけば $R^A - i X^A = \rho_0 c\, Tan\left[\pi\left(\alpha + i\beta\right)\right]$ となるから図から解を求めることができる．

また $Tan\left[\pi\left\{\alpha + i\left(\beta + n\right)\right\}\right] = Tan\left[\pi\left(\alpha + i\beta\right)\right]$，$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから $\beta$ は 0 と 1 の間の値がわかっていれば充分である．

【例】　$\alpha = 0.03$，$\beta' = 1.52$ は $\beta = 1 - \left(1.52 - 1\right) = 0.48$ であるから $r^A = 7.4$，$x^A = -4.8$ に対応す．

第 5・22 図　$R^A + i X^A = \rho_0 c\, Tan\left[\pi\left(\alpha + i\beta\right)\right]$ の解を求める図表（MORSE）．

と表わされる．(74) は管の終端に任意のインピーダンスを接続したときの管の送端イソピーダンスを求める重要な式である．

終端を閉鎖した管の $x$ なる断面から終端の方を見た比音響インピーダンスは

(75)　　$x = l$　にて　$\dot{\Xi}_2 = 0$,　　$Z^A(l) \to \infty$

となるようにのを選ぶことによって与えられる．よって

(76)　　$$Tan\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i\tan\frac{\pi}{2} \Rightarrow \infty$$

なることを用いて

(77)　　$$\psi + ikl = i\frac{\pi}{2}$$

とおくと，

(78)　　$$Tan(\psi + ikx) = i\tan\left(kx - kl + \frac{\pi}{2}\right)$$

となるから，任意の断面から終端の方を見た比音響インピーダンスは

(79)　　$$Z^A(x) = i\rho_0 c\cot\left[k(l-x)\right] = i\rho_0 c\cot\left[\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\right] \quad (\text{Pa}\cdot\text{s/m})$$

終端が開放されている管の送端インピーダンスは，開口端の負荷インビーダンスがピストンの輻射インピーダンスと等価であると見なして求めることができる．すなわち 5・2・2 の（37）を用いて開放端の負荷インピーダンスを

(80)　　$$Z^A = \rho_0 c\left\{1 - \frac{1}{ka}\mathrm{J}_1(2ka)\right\} - i\frac{\rho_0 c}{2k^2a^2}\mathrm{K}_1(2ka) \quad (\text{Pa}\cdot\text{s/m})$$

とおくと，開口端の境界条件は

(81)　　$$Tan(\psi + ikl) = Tan\left[\pi(\sigma + i\mu)\right] = 1 - \frac{1}{ka}\mathrm{J}_1(2ka) - \frac{i}{2k^2a^2}\mathrm{K}_1(2ka).$$

これより $\sigma$ と　$\mu$とが定められるから，管内の任意の断面から開口端の方を見たインピーダンスを知ることができる．

（80）を用いてフランジを有する開口端の補正項を求めることができる．管の半径が波長と比較して充分に小さい場合には，（80）の実数部は虚数部に比較して非常に小さくなり，かつ（80）の虚数部は附加質量のリアクタンスの形で表わされるから

(82)　　$$Z^A(l) \approx -i\omega\frac{M'}{S} \quad (\text{Pa}\cdot\text{s/m}),$$

$$M' = \frac{8}{3}\rho_0 a^3 \quad (\text{kg}).$$

よって，　$x = l$　断面から　$+x$ 方向を見た位置角は（73）より

(83)　　$$\psi = -ikl + Tan^{-1}\left(-ik\frac{8a}{3\pi}\right)$$

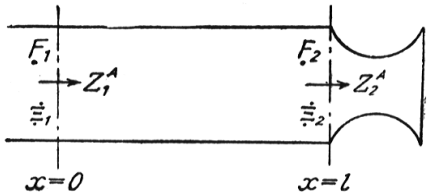
$$\approx -ik\left(l + \frac{8a}{3\pi}\right),$$

よって終端開放管の送端インピーダンスは（74）より

(84)　$$Z^A(x) = -i\rho_0 c \tan\left[k\left(l - x + \frac{8a}{3\pi}\right)\right] \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

となり，開口端の~~規正項~~は 4・5・6 に示した結果と一致する．

音響管の特性インピーダンス密度 $Z_0{}^A$ と送端の位置角 $\psi_1$ を知るには，長さ $l$ なる管の終端を閉じたときの送端インピーダンス密度 $Z_{10}{}^A$ と，終端を開放したときの送端インピーダンス密度 $Z_{1s}{}^A$ とを求めることができれば




第　5･23 図

(85)　$$Z_0{}^A = \sqrt{Z_{1s}\cdot Z_{10}} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

$$\theta_1 = Tan^{-1}\sqrt{\frac{Z_{1s}}{Z_{10}}}$$

で与えられる．ここに終端閉鎖管の場合は $\dot{\Xi}_2 = 0$，$Z_2{}^A \to \infty$ となるから電気回路における終端開放と等価な条件となるので $Z_{10}{}^A$ と記し，また管の終端を開いた場合には $F_2$ が非常に小さくなり電気回路の終端を低抵抗で短絡した場合に相当するので $Z_{1s}{}^A$ を記した．この短絡抵抗の大きさに相当するものが管の~~開及端の規正項~~である．

5・3・3 有限長の円錐ホーン(1)

長さが $l(m)$ なる円錐ホーンの音響インピーダンスを求めてみよう．管内の音場は 5・3・1 の（10）に5･3･2の（60）を用いて変形すれば

(86)　$$\dot{\Phi}(x) = \frac{2\dot{\Phi}_0^{(+)}}{x} e^{-\psi}\, Sin(\psi + ikx),$$

(87)　$$\dot{P}(x) = \frac{2\dot{P}_0^{(+)}}{x} e^{-\psi}\, Sin(\psi + ikl),$$

(88)　$$\dot{\Xi}(x) = \frac{2\dot{P}_0^{(+)}}{\rho_0 c x} e^{-\psi}\left[Cos(\psi + ikx) + \frac{i}{kx} Sin(\psi + ikx)\right],$$

$$\dot{P}_0^{(+)} = -i\omega\rho_0\dot{\Phi}_0^{(+)}, \qquad k = \omega/c$$

と表わされ，任意の断面 $(x)$ から $+x$ 方向を見た音響インピーダンスは

(89)　$$Z^A(x) = \frac{\rho_0 c}{Cot(\psi + ikx) + \frac{i}{kx}} = \frac{\rho_0 c\, Tan(\psi + ikx)}{1 + \frac{i}{kx} Tan(\psi + ikx)} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

となる．第 5・15 図を参照して管の長さを

(90)　$$l = x_2 - x_1 \qquad (\mathrm{m})$$

と表わすとき，ホーンの開口部の負荷インピーダンス密度は（80）と見なすことができるから，（72）に相当する形を（89）から求めると

（1）　小林(勝一郎)：”有限長 ConicaI Horn の送音端における音響インピーダンスについて”　電学誌 45巻，1159－1169 頁，1925 年，同 46 巻．

(91)
$$\frac{Tan\left(\psi+ikl+ikx_1\right)}{1+i\dfrac{1}{k\left(l+x_1\right)}Tan\left(\psi+ikl+ikx_1\right)}=\frac{Z_2{}^A}{\rho_0 c}=\frac{R_2{}^A-iX_2{}^A}{\rho_0 c},$$
$$\frac{R_2{}^A}{\rho_0 c}=\left[1-\frac{1}{ka}\mathrm{J}_1\left(2ka\right)\right]=r_2{}^A,$$
$$\frac{X_2{}^A}{\rho_0 c}=\frac{1}{2k^2a^2}\mathrm{K}_1\left(2ka\right)=x_2{}^A$$

となる．よって

(92)
$$Tan\left[\psi+ik\left(l+x_1\right)\right]=Tan\left[\pi\left(\sigma+i\mu\right)\right]=\frac{r_2{}^A-ix_2{}^A}{\left\{1-\dfrac{x_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}-i\dfrac{r^A}{k\left(l+x_1\right)}\right\}}$$
$$=\frac{r_2{}^A\left\{1-\dfrac{x_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}\right\}+\dfrac{x_2{}^A r_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}-i\left[x_2{}^A\left\{1-\dfrac{x_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}\right\}-\dfrac{\left(r_2{}^A\right)^2}{k\left(l+x_1\right)}\right.}{\left\{1-\dfrac{x_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}\right\}^2+\left\{\dfrac{r_2{}^A}{k\left(l+x_1\right)}\right\}^2}$$

より $\psi$ を定めることができる．

開口部の寸法が波長に比して充分に大きい場合には

(93)
$$r_2{}^A\approx 1,\qquad R_2{}^A\approx\rho_0 c,$$
$$x_2{}^A\approx 0,\qquad X_2{}^A\approx 0$$

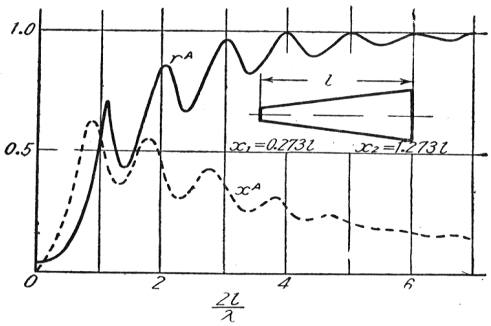
と見なすことができるので，(92) は

(94)
$$Tan\left[\pi\left(\sigma+i\mu\right)\right]\approx\frac{k^2\left(l+x_1\right)^2+ik\left(l+x_1\right)}{1+k^2\left(l+x_1\right)^2}$$

と表わされる．よって第 5・23 図を用いて $\alpha_2$ と $\beta_2$ を決定することができ，したがって

(95)
$$\psi=\pi\sigma+i\pi\mu-ik\left(l+x_1\right)=\pi\left[\sigma+i\left\{\mu-\frac{2\left(l+x_1\right)}{\lambda}\right\}\right].$$

円錐ホーンの送端 $\left(x=x_1\right)$ から見たインピーダンスは (89)) より




第 5・24 図 開口面積が波長に比して充分大きい有限長円錐ホーンの送端から見た比音響インピーダンス比 (MORSE).

(96)
$$S_1 Z^A\left(x_1\right)=\frac{S_1\rho_0 c\,Tan\left[\pi\left(\sigma+i\mu-i2l/\lambda\right)\right]}{1+i\dfrac{\lambda}{2\pi x_1}Tan\left[\pi\left(\sigma+i\mu-i\angle l/\lambda\right)\right]}$$
$$=\left(R_1{}^A-iX_1{}^A\right)S_1$$
$$=R_1{}^M-iX_1{}^M \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})$$

となる．第 5・24 図には有限ホーンの送端インピーダンスの一例が示してある．

5・3・4　有限長の指数ホ－ン

音響伝送系として，各種のホーンと音響管とについて説明したが，これらを実際に使用する場合には，送端に振動源を置き，他端に受音器かまたは適当な音響負荷を接続し，音響エネルギ－が満足に伝送されるような状態とするのが普通である．したがって送端に接続すべき振動源の内部インピーダンスと他端に接続される負荷インピーダンスとが重要な作用をするようになる．

音響管は 5・3・2 で述べたように，管の特性インピーダンスと自由空間を伝播する平面波の特性インピーダンスとが等しいために，送受端に接続すべき負荷インピーダンスと管の特性インピーダンスとの間の整合を取ることが必要となる．しかしホーンの場合には，適当なホーンを用いれば任意の送受端インピーダンスの間の整合をホーンで取ることが可能となる．この目的にホーンを用いるには，指数ホーンが最も優れた性質を有している．たとえば振動板からの出力を能率よく大気中に輻射する場合には，指数ホーンを附加することにより広い周波数帯にわたって良好な輻射特性を持たせることができるし，また逆に空間の音を集音して受音器で受ける場合にも，空間内の平面波の特性インピーダンスと受音器の音響インピーダンスを整合するために指数ホーンは重要な役をする．これらの性質を理解するためには，有限長の指数ホーンの両端に負荷インピーダンスが接続されたものについて，その性質を明らかにしておく必要がある．

指数ホーン内の音場は5・3・1の（32）で定められるが，いま

(97)
$$k_1{}'=\alpha+i\beta=\sqrt{k^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2}+i\beta\,,$$
$$k_2{}'=-\alpha+i\beta=-\sqrt{k^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2}+i\beta$$

とおくと，(32) は

(98)
$$\dot{\Phi}=Ae^{ik_1{}'x}+Be^{-ik_2{}'x}$$

となり，第一項は $+x$ 方向に進行する波動成分，節二項は $-x$ 方向に進行する波動成分を表わす．ここで

(99)
$$k_1{}'=\left|k_1{}'\right|e^{i\theta_1}=k\,e^{i\theta}$$
$$k_2{}'=\left|k_2{}'\right|e^{i\theta_2}=k\,e^{-i\theta+i\pi}=-k\,e^{-i\theta}\,,$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\,,\qquad k=\frac{\omega}{c}$$

と表わし，(98) に対応する音場の諸量を求めると

(100)
$$\dot{P} = -i\omega\rho_0\dot{\Phi} = -i\omega\rho_0 e^{-\beta x}\left(Ae^{+i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}\right),$$

(101)
$$\dot{\Xi} = -\frac{\partial\dot{\Phi}}{\partial x} = \left(Ae^{-ik_1' x} + ik_2' Be^{-ik_2' x}\right),$$
$$= -ike^{-3x}\left(Ae^{i\alpha x+i\theta} - Be^{-i\alpha x-i\theta}\right).$$

ホーン内を $+x$ 方向に進行する波動成分は

(102)
$$\dot{\Phi}^{(+)} = Ae^{-\beta x+i\alpha x},$$
$$\dot{P}^{(+)} = \omega\rho_0 Ae^{-\beta x+i\alpha x-\frac{i\pi}{2}},$$
$$\dot{\Xi}^{(+)} = kAe^{-\beta x+i\alpha+i\theta-i\frac{\pi}{2}}$$

であり，この場合の特性インピーダンスは

(103)
$$Z_0^{(A+)} = \frac{\dot{P}}{\dot{\Xi}} = \frac{\omega\rho_0}{k}e^{-i\theta} = \rho_0 ce^{-i\theta} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}).$$

一方，$-x$ 方向に進行する波動成分は

(104)
$$\dot{\Phi}^{(-)} = Be^{-\beta x-i\alpha x},$$
$$\dot{P}^{(-)} = \omega\rho_0 Be^{-\beta x-i\alpha x-\frac{i\pi}{2}},$$
$$\dot{\Xi}^{(-)} = kBe^{-\beta x-i\alpha x-i\theta-i\frac{\pi}{2}}$$

であり，この場合の特性インピーダンスを

(105)
$$Z_0^{(A-)} = \frac{\dot{P}^{(-)}}{\dot{\Xi}^{(-)}} = \frac{\omega\rho_0}{k}e^{i\theta} = \rho_0 ce^{i\theta} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}).$$

と定義する.[1]

ホーンの送端 $(x=0)$ が内部インピーダンスが $Z_1^s$ なる振動源に接続されホーンの終端がインピーダンス $Z_2^s$ なる負荷に接続されている場合には.

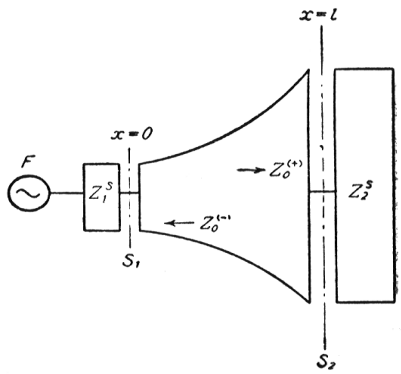
$x=l$ なる断面から $x$ の正方向を見たインピーダンスの値は $Z_3^s$（音 Ω）であり，これと $S_2$ 断面上の音圧 $\dot{P}_2$ および音の粒子速度 $\dot{\Xi}_2$ との間には（103）で規定される関係が成立すべきであるから，$x=l$ 終端面上では

(106)
$$Z_2^s\dot{\Xi}_2 = S_2\dot{P}_2 \qquad (\mathrm{N}).$$

振動源の振動により $S_1$ 面を $+x$ 方向に押す力が

(107)
$$F = F_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{N})$$

であるとすると，$S_1$ 面から $-x$ 方向を見たインピーダンスか（105）で規定されることより，$S_1$ 面上の力の平衡の式は




第 5・25図

（1）　$-x$ 方向へ進行するエネルギー流が正の値を取るように $Z_0^{(A-)}$ の符号を定める.

(108)
$$Z_1{}^s \dot{\Xi}_1 = -S_1 \dot{P}_1 + \dot{F} \qquad \text{(N)}$$

となる．よってこのホーンの境界条件は

(109)
$$Z_1{}^s \dot{\Xi}_1 = \dot{F} - S_1 \dot{P}_1 \qquad (x=0),$$
$$Z_2{}^s \dot{\Xi}_2 = S_2 \dot{P}_2 \qquad (x=l)$$

となる．ここに $F$ は $F$の実効値である．

（109）に（100）と（101）を代入すると $A$ および $B$の値が定められるが，いま

(110)
$$R = \frac{B}{A} = \frac{Z_2{}^s e^{i\theta} - \rho_0 c S_2}{Z_2{}^s e^{-i\theta} + \rho_0 c S_2} e^{i2\alpha l} = |R| e^{i(2\alpha l + \eta)}$$

とおくと

(111)
$$A = i\frac{c}{\omega}\frac{\dot{F}}{\left[Z_1\left(e^{i\theta} - R e^{-i\theta}\right) + \rho_0 c S_1 (1+R)\right]} = |A| e^{i\phi}$$

となり，音場は

(112)
$$\dot{\Phi} = \left[1 + |R| e^{i2\alpha(l-x)+i\eta}\right] |A| e^{-\beta x + i\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)},$$
$$\dot{P} = \omega\rho_0\left[1 + |R| e^{i2\alpha(l-x)+i\eta}\right] |A| e^{-\beta x + i\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)},$$
$$\dot{\Xi} = \frac{\omega}{c}\left[1 - |R| e^{i2\alpha(l-x-\theta)+i\eta}\right] |A| e^{-\beta x + i\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

任意の断面より $+x$ 方向を見た比音響インピーダンスは

(113)
$$Z^{(A+)} = \rho_0 c \frac{1 + |R| e^{i2\alpha(l-x)+i\eta}}{1 - |R| e^{i2\alpha(l-x-\theta)+i\eta}} \qquad \text{(Pa・s/m)},$$

$-x$ 方向を見た比音響インピーダンスは

(114)
$$Z^{(A-)} = -\rho_0 c \frac{1 + |R| e^{i2\alpha(l-x)+i\eta}}{1 - |R| e^{i2\alpha(l-x-\theta)+i\eta}} \qquad \text{(Pa・s/m)}$$

となる．任意の断面から見たインピーダンスはこれらの値に断面積 $S_1 e^{mx}$ を乗じたものである．(2)

ホーンの出口 $(x=l)$における音場は

(115)
$$\dot{P}_2 = \omega\rho_0\left(1 + |R| e^{i\eta}\right) |A| e^{-\beta l + i\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)},$$
$$\dot{\Xi}_2 = \frac{\omega}{c}\left(1 - |R| e^{i(\eta - 2\theta)}\right) |A| e^{-\beta l + i\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

であり，この断面を通って $+x$ 方向に伝送されるエネルギー流は

(116)
$$\overline{W}_2 = \Re e\left[Z_2{}^s \left|\dot{\Xi}\right|^2\right] \qquad \text{(W)}.$$

ホーンの入口 $(x=0)$ における音場は

（2）　ここに示した方法と５・３・３ の双曲線函数を用いる方法とは，いずれを用いてもよい．

$$P_1 = \omega\rho_0\left(1+|R|e^{i(2\alpha l+\eta)}\right)|A\,e^{i\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}\,,$$

(117)

$$\dot{\Xi}_2 = \frac{\omega}{c}\left(1-|R|e^{i(2\alpha l-2\theta+\eta)}\right)Ae^{i\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}$$

であるから，$S_1$ 面から $+x$ 方向を見た送端インピーダンスは

(118)

$$S_1 Z_1{}^A = \rho_0 c S_1 \frac{1+|R|e^{i(2\alpha l+\eta)}}{1-|R|e^{i(2\alpha l-2\theta+\eta)}} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})\,,$$

$S_1$ なる断面を通り $+x$ 方向に伝送されるエネルギー流は

(119)

$$\overline{W}_1 = \Re e\left(S_1 Z_1{}^A\left|\dot{\Xi}\right|^2\right) \qquad (\mathrm{W})$$

である．ホーン内で損失がなければ $\overline{W}_2$ と $\overline{W}_1$ とは等しい値を持つ．

つぎにホーンの終端が自由空間に向って開放されている場合に負荷インピーダンス $Z_2{}^s$ の値を求める方法を述べよう．ホーンの開口面から自由空間に輻射される音波は，ホーンからやや離れた所では球面波の形で伝播して行くと考えられる．よって開口面から $+x$ 方向を見たインピーダンスを呼吸球の輻射インピーダンスで置きかえることが可能であろうと予想される．半径 $a_0$ なる呼吸球の輻射インピーダンスは

(120)

$$S_0 Z_0{}^A = S_0\rho_0 c\frac{k^2 a_0{}^2 - ika_0}{1+k^2 a_0{}^2} = \frac{S_0\left(\rho_0 c k^2 a_0{}^2 - i\omega\rho_0 a_0\right)}{1+k^2 a_0{}^2} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})\,,$$

$$S_0 = 4\pi a_0{}^2 \qquad (\mathrm{m}^2)$$

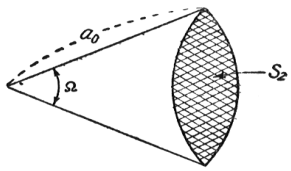
であるから，十分低周波における呼吸球の単位表面積あたりの附加質量は

(121)

$$m_0{}' = \rho_0 a_0 \quad (\mathrm{kg/m^2})$$

である．この呼吸球をホーンの開口面の代りに用いるためには，開口面積 $S_2$ と等価な有効表面積を持つ球の大きさ $a_0$ を決定しなければならぬ．

~~ホーン~~の開口面積 $S_2$ と等価な呼吸球の有効面積が第 5·26 図のように立体角 $\Omega$ を用いて




第 5・26 図

(122)

$$S_2 = \Omega a_0{}^2 \qquad (\mathrm{m}^2)$$

で定められたとすると

(123)

$$a_0 = \sqrt{S_2/\Omega} \qquad (\mathrm{m})\,,$$

全附加質量は

(124)

$$M_0{}' = S_2\rho_0 a_0 = \rho_0 S_2\sqrt{S_2/\Omega} \qquad (\mathrm{kg})$$

となる．この $\Omega$ は未だ不明の量であるが，前節で述べた通り，呼吸球の輻射インピーダンスと無限大バッフル板付きピストンの輻射インピーダンスとが，低周波および高周波でほとんど一致することから，表面積 $S_2$ なるピストンの低周波における附加質量と（124）とを比較して $\Omega$ を定めることができる．ピストンの附加質量は

(125)　$$M' = \rho_0 \frac{8S_2}{3\pi}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}} \quad \text{(kg)}$$

であるから，(124) と (125) とを等しいとおくと

(126)　$$\sqrt{\Omega} = \frac{3}{8}\pi\sqrt{\pi}\ ,$$
$$\Omega = 1.39\pi\ .$$

しかるにピストンの半径 $a_2$ は

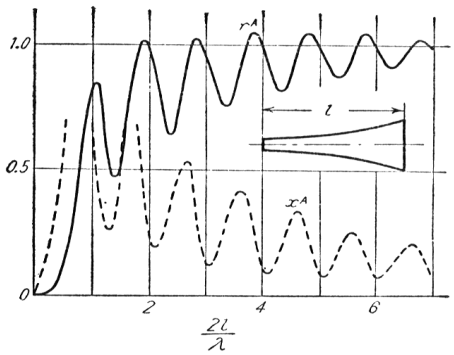
(127)　$$a_2 = \sqrt{S_2/\pi}$$

であり，これはまたホーンの開口面の半径である．よって (123) より，$S_2$ と等価な呼吸球の半径は

(128)　$$a_0 = \frac{a_2}{\sqrt{1.39}} = 0.85a_2 \quad \text{(m)}$$

となる．よってホーンの負荷インピーダンスは (120) の $a_0$ に (128) を用いて決定することができる．有限長指数ホーンの送端から見た比音響インピーダンス比は第5・27 図に示している．

負荷インピーダンスを有する指数ホーンは電気回路の理想的変成器[3]のような機能を有し，損失なくインピーダンス整合を行うことができる．このようなホーンの等価電気回路についても検討されているが，ここでは省いておく．詳細は CRANDALL[4]の著書を参照されたい．




第5・27図
開口端が波長に比して充分大きい有限長指数ホーンの送端より見た比音響インピーダンス比（MORSE）.

## 5.4　音　響　回　路

音響伝送系と電気回路との類似性から音響管やホーン内の音場の性質を音響インピーダンスを用いて表現するという概念を用いると，振動源から発せられる音が管やホーンの中を伝送されて受端(または外界)に到達するまでの経過を電気回路の送端に加えられた電圧や電流が受端に到達するまでの経過と類似の概念で理解することができる．このように考えるときに，この伝送系を音響回路と呼ぶ．電気回路には，回路素子として抵抗，インダクタンスおよび容量等があり，これらを組合わせると，減衰器，濾波器，変成器等が構成される．音響回路においても抵抗素子，慣性素子，弾性素子があって上記の３素子に対応し，また減衰器，濾波器，変成器等を構成することができる．[1]ただ電気回路

(3)　ideal transformer
(4)　CRANDALL: 前掲，p.166.
　　MORSE: 前掲，p.225.
(1)　小林(勝一郎)：”電気音響学” 電学誌．第 57 巻，第 3 号，第 4 号，1932 年.
　　〃　　“電気音響” 共立出版，1950 年.
　　八 木(秀 次)：”音響科学” オーム社，1939 年.

と音響回路との根本的な相違のために全く等価なものは実現できない場合が多い．

5・4・1　音響回路の回路素子

集中定数回路と考えて取扱った電気振動回路と，音響振動回路との間の回路素子の対比はすでに5・1・4で述べた通りであり，電気回路のインダクタンスに対応する慣性素子は流体粒子が運動する部分（粒子速度を有する部分）の流体質量で表わされ，電気回路の容量に対応する弾性素子は流体が圧縮を受ける部分（圧力変化を有する部分）の流体容積とその容積に接続する音響管の断面積で表わされる．しかるに抵抗素子について5・1・4の対応を見ると，電気回路と機械振動等では系が消費する熱エネルギーに関係する量が抵抗素子として表わされているのに対して，音響抵抗は音響系から輻射されることによって消費される音響エネルギーに関係した量となっている．かして実際に音響回路の中で抵抗素子を使用しようとする場合には，輻射抵抗では不便な場合が多いので，音響抵抗素子にも純熱エネルギーとして消費するようなものを用意しておく必要がある．(2)

音響回路の抵抗素子として利用されるものは4・6・5で述べた細管または狭い間隙である．1本の細管の音響抵抗は4·6·5を参照すれば容易に求めることができるが，このようなものは抵抗回路の入力インピーダンスが高くなるので入力端子で音波の反射を生じ，抵抗素子内に音波が侵入し難くなる場合が多い．したがって，音響抵抗素子は必然的に多孔性構造のものとなる．吸音物質と呼ばれるものは，多くはこのような多孔性物質であって，その入力インピーダンスを伝送系の特性インピーダンスになるべく近い値に保ちながら．吸音体内では音響エネルギーを熱エネルギーに変換しやすい構造にしたものである．

細菅は抵抗素子であって同時に，管内の流体の運動によって生ずる質量リアクタンスをも生じ，慣性素子としても動作する．このことは電気回路の抵抗素子が導線の残留インダクタンスのためにリアクタンス素子として作用するのと似ている．したがって細管を抵抗素子として動作させるためには，なるべく質量リアクタンスが影響を生じないような方法を取らねばならない．

薄い板に多数の細孔を穿ったものや，布とか紙などは抵抗素子として利用され，またこれらを多層に重ねたものも抵抗素子となる．4・6・6 の多層制動振動板も抵抗素子として便利なものである．このように音響回路の抵抗素子には色々のものが考えられるが，いずれもその抵抗値は振動数の函数となるのが普通であり，抵抗体の寸法と音波の波長とに関係して抵抗値が変るものが多い．

波長に較べて長い音響回路では慣性素子と弾性素子とを分離することができない場合が多いが，音波の伝送路中で管が細くなる部分は主として質量リアクタンスおよび抵抗として作用し，太い部分は主として弾性リアクタンスとして作用する．

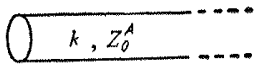
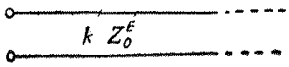
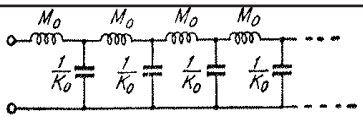
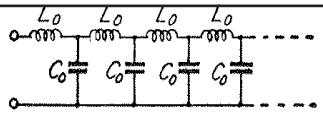
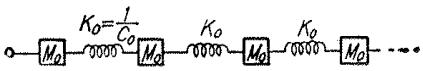
一様な太さの無限に長い管は，電気回路の分布定数回路のようにその等価回路を分布直列質量密度

---

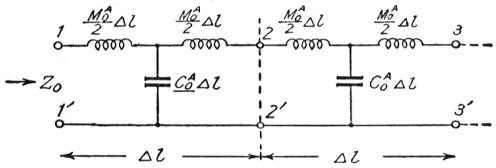
（2）　音響回路は電気回路の分布定数回路または四端子回路と見なさねばならぬ．二端子回路網的の考え方は特別の場合にしか適用できない．

$M_0$ (kg/m$^3$) と分布並列音響キャパシタンス $C_0{}^A$ (m/N) との縦続で表わすことができる（第 5・4 表）．

第 5・4 表　音響管の分布定数回路定数．

| 音　響　管 | 電気回路平行二線条 |
|---|---|
|  |  |
|  $Z_0{}^A = \sqrt{\dfrac{M_0{}^A}{C_0{}^A}} = \rho_0 c$ (Pa・s/m)，<br>$k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{M_0{}^A C_0{}^A}$ (rad/m)，<br>分布直列質量　$M_0{}^A = \rho_0$ (kg/m$^3$)，<br>分布並列音響キャパシタンス<br>$C_0{}^A = \dfrac{1}{\rho_0 c^2} = \dfrac{1}{K_0{}^A}$ (m/N)． |  $Z_0{}^E = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$ (Ω)，<br>$k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ (rad/m)，<br>直列分布インダクタンス　$L_0$ (H/m)，<br>並列分布容量　$C_0$ (F/m)． |
| 等価振動系<br>  <br>分布直列質量　$M_0{}^M = \rho_0 S$ (kg/m)，<br>分布直列スティフネス<br>$K_0{}^M = \dfrac{S}{C_0{}^A} = S\rho_0 c^2$ (N・m)， | $Z_0{}^M = \sqrt{M_0{}^M K_0{}^M} = S\rho_0 c$ (N・s/m)，<br>$k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\dfrac{M_0{}^M}{K_0{}^M}}$ (rad/m)． |

よって音響管の波長に較べて充分に短かい区間　$\Delta l$ を四端子回路で表わすと第 5・28 図のように T 形対称回路で表わされる．(3)



$\dfrac{M_0{}^A \Delta l}{2} = \dfrac{\rho_0 \Delta l}{2}$ (kg/m$^2$)，

$C_0{}^A \Delta l = \dfrac{\Delta l}{\rho_0 c}$ (m$^3$/N)．

第 5・28 図　音響管の等価四端子回路

### 5・4・2　側面に孔を有する管

半径　$a$ (m)　，長さ　$l$ (m)　なる円筒管の送端から　$x_1$ (m)　の位置に半径　$b$ (m)　なる孔があいている場合の，管の性質を調べてみよう（第 5・29 図）．このような管は管楽器によく用いられているが，音響回路素子としても重要なものである．

孔の影響は 4・4 ですでに述べておいたが，波長に比して小さい孔の音響インピーダンスは，孔を長さが　$\delta$ なる短かい両端開放管と考え，孔の部分の流体が運動することによって生ずる負荷質量を 5・3・2 の（82）を用いて

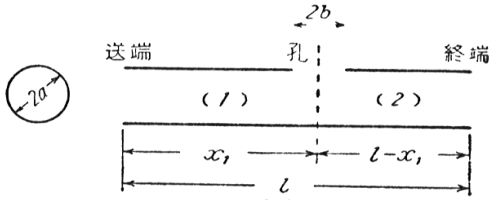
（3）　四端子回路については電気回路の著書を参照のこと．たとえば黒川（兼三郎）“電気回路交流現象論”第 13 章，工業図書，1934 年．

（1）　$$M_H = \pi b^2 \delta \rho_0 + \frac{16}{3} b^3 \rho_0 \approx \frac{16}{3} b^3 \rho_0 \qquad \text{(kg)}$$

とおけば，管内から孔を見たインピーダンスは

（2）　$$Z_H{}^A = -i\omega\rho_0 \frac{16}{3} b \qquad \text{(Pa･s/m)}$$

となる．一方 $x = x_1$ 断面から終端の方を見た長さ $\left(l - x_1\right)$ なる開放管のインピーダンスは 5・3・2 の（84）より




第 5･29 図　孔を有する管．

（3）　$$Z_2{}^A\left(x_1\right) = -i\rho_0 c \tan\left[k\left(l - x_1 + \frac{8a}{3\pi}\right)\right] \qquad \text{(Pa･s/m)}.$$

孔のある位置 $\left(x = x_1\right)$ の音圧の実効値を $\dot{P}\left(x_1\right)$ とすると，$x_1$ 断面から管の終端に向う粒子速度は

（4）　$$\dot{\Xi}_2\left(x_1\right) = \frac{\dot{P}\left(x_1\right)}{Z_2{}^A\left(x_1\right)} \qquad (m/s),$$

この断面から孔を通過する方向に向う粒子速度は

（5）　$$\dot{\Xi}_H\left(x_1\right) = \frac{\dot{P}\left(x_1\right)}{Z_H{}^A} \qquad \text{(m/s)}.$$

よって，$x_1$断面における流体の連続の式は

（6）　$$\pi a^2 \dot{\Xi}_1\left(x_1\right) = \pi a^2 \dot{\Xi}_2\left(x_1\right) + \pi b^2 \dot{\Xi}_H\left(x_1\right) \qquad \text{(m}^3\text{/s)},$$

ここに $\dot{\Xi}_1\left(x_1\right)$は送端から $x_1$断面に向う粒子速度の $x_1$ 断面における値である．これより

（7）　$$\dot{\Xi}_1\left(x_1\right) = \dot{\Xi}_2\left(x_1\right) + \frac{b^2}{a^2}\dot{\Xi}_H\left(x_1\right) \qquad \text{(m/s)}$$

となり，管内の領域（1）から $+x$ 方向を見たインピーダンス密度は

（8）　$$Z_1{}^A\left(x_1\right) = \frac{\dot{P}\left(x_1\right)}{\dot{\Xi}_1\left(x_1\right)} = \frac{P\left(x_1\right)}{\dfrac{\dot{P}\left(x_1\right)}{Z_2{}^A\left(x_1\right)} + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\dot{P}\left(x_1\right)}{Z_H{}^A\left(x_1\right)}}$$

$$= \frac{\pi a^2}{\left[\dfrac{\pi a^2}{Z_1{}^A\left(x_1\right)} + \dfrac{\pi b^2}{Z_H{}^A\left(x_1\right)}\right]} = -i\omega\rho_0 \frac{16}{3\pi}\frac{a^2}{b} G\left(\omega\right)$$

ただし

（9）　$$G\left(\omega\right) = \frac{\tan\left[\dfrac{\omega}{c}\left(l - x_1 + \dfrac{8a}{3\pi}\right)\right]}{\left(\dfrac{\omega}{c}\cdot\dfrac{16}{3\pi}\dfrac{a^2}{b}\right) + \tan\left[\dfrac{\omega}{c}\left(l - x_1 + \dfrac{8a}{3\pi}\right)\right]}.$$

よって送端から見たインピーダンスは

(10)　$$Z_1{}^A\left(0\right) = -i\rho_0 c \tan\left[k x_1 + \tan^{-1}\left\{\frac{\omega}{c}\frac{16a^2}{3\pi b} G\left(\omega\right)\right\}\right] \qquad \text{(Pa･s/m)}$$

であり，このときの共鳴振動数は

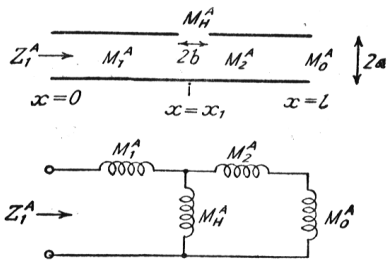
(11)
$$\tan^{-1}\left\{\frac{\omega}{c}\frac{16a^2}{3\pi b}G(\omega)\right\}=n\pi-kx_1\,,$$
$$n=1,2,3,\cdots$$

より決定される．

特に $a$ と $b$ とが波長に比して充分に小さく，かつ $l$ が半波長より小さい場合には

(12)
$$Z_1{}^A(0)\Rightarrow-\left[i\omega M_1{}^A+\frac{1}{\dfrac{1}{i\omega\left(M_2{}^A+M_0{}^A\right)}+\dfrac{1}{i\omega M_H{}^A}}\right]\qquad(\mathrm{Pa\cdot s/m})\,,$$
$$M_1{}^A=\rho_0 x_1\,,\qquad M_2{}^A=\rho_0\left(l-x_1\right)$$
$$M_0{}^A=\frac{8\rho_0 a}{3\pi}=\frac{8\rho_0}{3\pi}\sqrt{\frac{S_0}{\pi}}\,,\qquad M_H{}^A=\frac{16\rho_0 a^2}{3\pi b}=\frac{16\rho_0 S_0}{3\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{S_1}}\,,$$
$$S_0=\pi a^2\,,\qquad S_1=\pi b_2$$

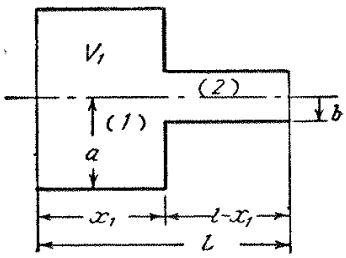
なる簡単な形となり，その等価回路は第 5･30 図のようになる．



第5・30図　側面に孔を有する管の低音域における等価回路．

5・4・3　断面積が変化する管

管の断面積が急激に変化するような部分は音響回路素子として重要なものである．第 5・31 図のように半径 $a$ 長さ $x_1$ なる円管（1）と半径 $b$ 長さ $\left(l-x_1\right)$ なる円管（2）を，中心軸が一直線となるように接続したもののインピーダンスを求めて見よう．円管（2）の半径 $b$ 波長に比して充分小さいものとすると，$x=x_1$ 端からこの管の出口 $(x=l)$ を見た比音響インピーダンスは 5・3・2 の（84）より



第5・31図
断面積の変化する管．

(13)
$$Z_2{}^A\left(x_1\right)=\rho_0 c\,Tan\left[-ik\left(l-x_1+\frac{8b}{3\pi}\right)\right]$$
(Pa ).

領域（1）内の $x=x_1$ の近傍の断面から$+x$ 方向を見たインピーダンス密度を $Z_1{}^A\left(x_1\right)$ とおくと，その断面上の粒子速度 $\dot{\Xi}_1\left(x_1\right)$ と音圧 $\dot{P}_1\left(x_1\right)$ との間には

(14)
$$Z_1{}^A\left(x_1\right)\dot{\Xi}_1\left(x_1\right)=\dot{P}_1\left(x_1\right)$$

なる関係があり，また領域（2）内の $x_1$ 断面上では

(15)
$$Z_2{}^A\left(x_1\right)\dot{\Xi}_2\left(x_1\right)=\dot{P}_2\left(x_1\right)$$

なる関係がある．しかるに $x_1$ の近傍の波長に比較して小さい領域内では音圧は一様であると考えられるから

(16)
$$\dot{P}_1\left(x_1\right)=\dot{P}_2\left(x_1\right).$$

つぎに $x_1$ の近傍の波長に比して小さい領域内では体積速度が連続であると考えられるから

(17) $$\pi a^2 \dot{\Xi}_1\left(x_1\right) = \pi b^2 \dot{\Xi}_2\left(x_1\right).$$

これより

(18) $$Z_1{}^A\left(x_1\right) = \frac{\dot{\Xi}_2}{\dot{\Xi}_1} Z_2{}^A\left(x_1\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 Z_2{}^A\left(x_1\right) \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

を得るから，領域（1）内から $+x$ 方向を見たインピーダンスは

(19) $$Z_1{}^A\left(x\right) = \rho_0 c\, Tan\left[ik\left(x - x_1\right) + Tan^{-1}\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{Z_2{}^A\left(x_1\right)}{\rho_0 c}\right)\right]$$

$$= -i\rho_0 c \tan\left[k\left(x_1 - x\right) + \tan^{-1}\left\{\frac{a^2}{b^2}\tan k\left(l - x_1 + \frac{8b}{3\pi}\right)\right\}\right]$$

$$= -i\rho_0 c \tan\left[k\left(x_1 - x\right) + \pi\mu_1\right] \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

となる．

長さ $l$ が波長 $\lambda$ に比して充分小さく，かつ $2\pi a^2\left(l - x_1\right)$ が $\lambda b^2$ に比して充分大さい場合には

(20) $$\pi\mu_1 \approx \frac{\pi}{2} + \frac{c}{\omega\left(M_2{}^A + M_0{}^A\right)},$$

$$M_2{}^A = -\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\rho_0\left(l - x_1\right),$$

$$M_0{}^A = \frac{8}{3}\rho_0\left(\frac{a^2}{b^2}\right) \qquad (\mathrm{kg/m^2})$$

となるから（19）は

(21) $$Z_1{}^A\left(0\right) \approx \frac{-1}{\dfrac{1}{i\omega\left(M_2{}^A + M_0{}^A\right)} + i\omega C_1{}^A}$$

$$= \left[\frac{\dfrac{i}{\omega C_1{}^A}}{\omega^2 - \dfrac{1}{\left(M_2{}^A + M_0{}^A\right)C_1{}^A}}\right] \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m}),$$

ただし

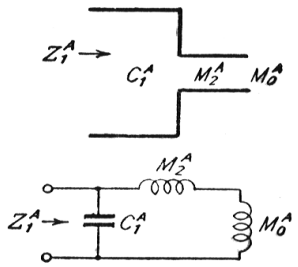
$$C_1{}^A = \frac{x_1}{\rho_0 c^2} = \frac{V}{\pi a^2 \rho_0 c^2} \qquad (\mathrm{m^3/N}),$$

$$V = \pi a^2 x_1 \qquad (\mathrm{m^3})$$

となり，等価回路は第 5·32 図のように示すことができる．したがって，この回路素子は音響容量 $C_1{}^A$ と質量密度 $M_2{}^A + M_0{}^A$ との並列回路に相当し，

(22) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1{}^A\left(M_0{}^A + M_2{}^A\right)}}$$

にて並列共振を生ずる．




第5・32図
断面の変化する管の送端インピーダンスの等価回路.

なお（17）および（18）の関係から，この素子が音響インピーダン

スや粒子速度の変成器としても利用できることが予想され，その変成比は $(a/b)^2$ または断面積を用して $(S_1/S_2)$ と表わされる．なお領域（1）の断面 $x_1$ に作用する力を $\dot{F}_1(x_1)$ ，領域（2）の $x_1$ 断面に作用する力を $\dot{F}_2(x_1)$ とすると

(23)
$$\dot{F}_1(x_1) = S_1 P_1(x_1),$$
$$\dot{F}_2(x_1) = S_2 P_2(x_1)$$

であるから

(24)
$$F_2(x_1) = \left(\frac{S_2}{S_1}\right) F_1(x_1) = \frac{b^2}{a^2} F_1(x_1)$$

となる．よってこの面にピストンを置いておけば，ピストンの受ける力の大きさを $(S_2/S_1)$ 倍に変成することができる．

### 5・4・4　音響減衰器

音波が比較的短かい区間を通過する間に，かなり多量の減衰を受けるような音響回路は，音響減衰器と見なすことができる．このような回路を構成するには，前に述べた抵抗素子を用いなければならないが，そのリアクタンス分が抵抗に較べて無視できる程度でなければならない．

管の内面に吸音物質を配置したものが減衰器として動作することは予想されるが，このようなものは波長に比して長い区間を必要とするので，[1]特殊の用途にしか使用できない．短かい区間で動作する減衰器については二三の試みがある．[2] その一つは薄板に多数の小孔を穿ったもので，孔の直径を $3.3\times10^{-6}$ m 位にしたときに質量リアクタンスは 5 kHz で10 %，2.5 kHz で 5 %程度であると報告されている．次の型は幅 $5\times10^{-4}$ m，厚さ $1.8\times10^{-8}$ m の銅のテープを間隔 $3\times10^{-6}$ m の渦巻状の層に巻いたものであり，これは音響回路の直列抵抗として作用する．第三の型は厚さ $1.8\times10^{-6}$ m の金属板に幅 $3.8\times10^{-6}$ m の細隙（溝）を間隔 $3\times10^{-4}$ m で穿ったもので，これは並列抵抗として動作する．よって直列抵抗と並列抵抗を適当に組合せて，入力端子と出力端子のインピーダンスを整合させれば減衰器が構成されることになる．

音響減衰器を利用して有限長の音響管の終端を無反射となるようにすることができる．このようなことは，有限長の管に無限長の管の[illegible]を持たせようとする場合に必要となり，これを無反射終端という．無反射終端を行うには全周波帯域にわたって入力インピーダンスが管の特性インピーダンスに等しく，かつ充分な減衰によって反射波の生じないような回路を見出せばよい．小林[3]は針孔を適当に穿った画用紙でホーンを作り，その口径 3.2 cm，喉の径 1 cm，長さ 43 cm として，200 Hz 以上の周波数帯域で良好に動作する無反射終端を試作した．[4]

---

（1）　J.SIVIAN:“Sound Propagation in Ducts lined with Absorbing Materials” J.A.S.A., Vol. 9, p.135～140,1937.

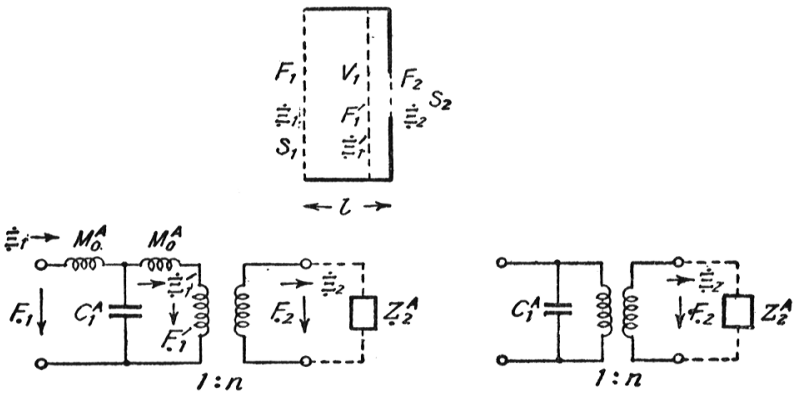
（2）　P.B.FLANDERS: “Acoustic Attenuators” BelI Lab. Rec., Vol.16, p.403～406, 1938.

（3）　小林(勝一郎): “漏洩ある喇叭による音響端子”信学誌, 409 頁, 1934 年.
“管中に純進行音波を作るための端装置” DEMPA, 第1巻, 141～147 頁, 1934 年.

（4）　八木(秀次):“音響科学”157 頁, ォーム社, 1939 年.

### 5・4・5　音響変成器

電気回路における変成器のように，入力端子に作用する音場の力や粒子速度の大きさを一定の比で変換して出力端子から取り出すには，5·4·3に示した断面積の変化を利用する．このような回路を音響変成器[1]と呼び，入力断面に作用する力と出力断面に生ずる力との間の変成比は（24）に示したように $S_2/S_1$ であり，その粒子速度の変成比は（17）より明らかなように $S_1/S_2$ である．よって入力端の断面積 $S_1$ が大きく，出力端の断面積 $S_2$ が小さい変成器では，出力端の断面に生ずる力が入力端の断面に加わる力の $(S_2/S_1)$ 倍に減少し，一方出力端の断面上の粒子速度は入力端の断面上の粒子速度の $(S_1/S_2)$ 倍に増加する．入力端の断面積が小さく出力端の断面積が大きい場合には出力端に動ずる力が増大し，粒子速度が減少する．またこのような変成器を用いると，電気回路の変成器と同様に音響インピーダンス密度の変換をも行うことができ，その変成比は，（18）より明らかなように $(S_2/S_1)$ である．したがってこのような変成器を用いてインピーダンス整合を行うができる．音響変成器の等価回路は第 5· 28 図と第 5・32 図とより第 5・33図のように表わすことができる．




$$M_0{}^A = \frac{\rho_0 l}{2} \qquad (\mathrm{kg/m^3})$$

$$C_0{}^A = \frac{V_1}{S_1 \rho_0 c^2} \qquad (\mathrm{m^3/N})$$

$$n = \frac{S_2}{S_1}.$$

(a)　$kl$ が小さくない場合．　　(b)　$kl \ll 1$ の場合．

第 5·33 図　音響変成器の等価回路．

音響変成器は振動板と空気負荷とのインピーダンス整合を行う場合に多く用いられ，このような場合にはホーンを併用することが多く，電話用受話器，ホーン型スピーカーその他の音響機器は盛んに利用されている．[2]

---

（1）　acoustic traosformer

（2）　小林（勝一郎）：“音響変成器および喇叭の双曲線変数，集音器の実用理論および音響伝送系の一般考察ならびに設計について”　電学誌，第49巻・419～449 頁，1929 年．

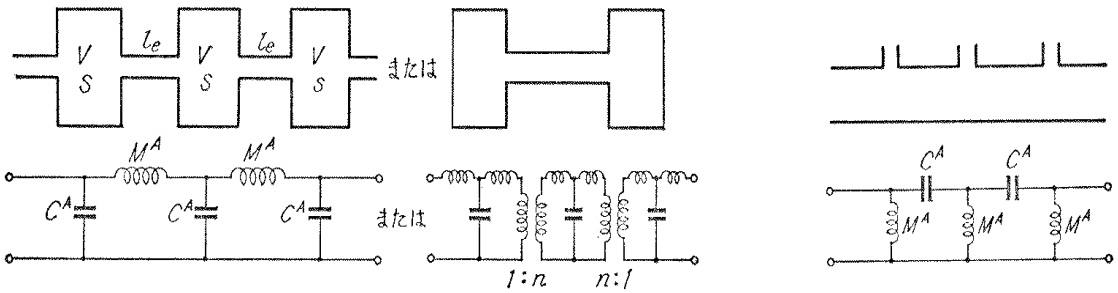
抜山（平一），小林（勝一郎）：“運動インピーダンスによる音響変成器の研究”　電学誌，第46巻，960～978頁，1926 年．

小林(勝一郎)：“理想的音響変成器”　電学誌，第48巻，679～684 頁，1928 年．

## 5･4・6　音響濾波器

音響回路は四端子回路網として扱うことができるので，電気回路の濾波器と同様の構想で音響濾波器が構成できるようになる．音響濾波器の構成理論は電気回路の濾波器構成理論とほとんど変らないから，ここでは詳細な説明を省き，結果のみを示すことにする．

既に述べたように，細くて短かい長さ $l$ なる管は $M^A = \rho_0 l_e$ $(\mathrm{kg/m^2})$ の質量素子として作用し，半径 $a$ なる開口面は $M^A = 8\rho_0 a / 3\pi$ $(\mathrm{kg/m^2})$ の質量素子となり，太くて短かい管は $C^A = V / S\rho_0 c^2$ $(\mathrm{m^3/N})$ の音響キャパシタンスとなる．ここに $l_e$ は開口端の規正を含む有効長，$V$ は容積，$S$ は断面積である．よって第 5・34 図 (a) のような回路は低域濾波器[1]として動作し，第 5・34 図 (b) のような回路は高域濾波器[2]として動作することが知られる．




(a)　低域濾波器　　(b)　高域濾波器

第 5・34 図　音 響 回 路 の 濾 波 器.

またゴム管のような柔らかい壁を有する管は音響濾波器として動作することが知られている．[3]さらに振動板の機械的共振と音響濾波器を組合せて帯域濾波器[4]を構成することもできる．(5)

音響濾波器については STEWART,[6] MASON,[7] LINDSAY,[8] 小林[9]等が詳細な研究を行っている，また消音器については文献 (10) を参照されることを望む．

---

(1) low pass filter

(2) high pass filter

(3) 小林 (勝一郎)：“音響管の特性の研究” 電学誌，第 48 巻，446～470 頁．1928年．

(4) band pass filter

(5) 小林 (勝一郎)：“電気音響” 第9章，共立出版 KK,1950年．

小林 (勝一郎)，矢田栄治：“帯域音響 波器の一試作” 電学誌，第 51巻，1931 年．

小林 (勝一郎)：“機械炉 器と音響 波器” 電気評論，第 19巻．1931年．

(6) G.W.STEWART: “Acoustic Wave Filters” Phys. Rev..Vol.20, P.528～551,1922.

(7) W.P.MASON: “A Study of Regular Combination of Acoustic Element, with Application to Recurrent Acoustic Filters, Tapered Acoustic Filters and Horns” B.S.T.J., VOI.6, p.258～294, 1924.

W.P.MASON: “The Apptoximate Network of Acoustic Filtets” B.S.T.J., Vol.9, p.332～340, 1930.

(8) R.B.LINDSAY: “Finite Acoustic Filters” J.A.S.A.,Vol.8, P.211～216, 1937.

R.B.LINDSAY: “The Filtration of sound I” J.App. Phys., Vol.9, p.612～622, 1938.

(9) 小林(勝一郎)：“音響濾波器の研究(其一，一般理論)” 電学誌，第 51 巻，199～202 頁．1931 年．

小林(勝一郎)：“円筒気室の音響特性” 電学誌，第 51巻，325～327 頁，1931 年．

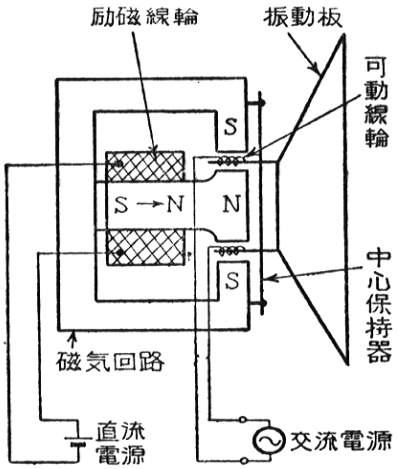
(10) 伊藤 (毅)：“騒音制御工学” コロナ社，1969 年．

# 5·5 電 気 音 響 変 換 系

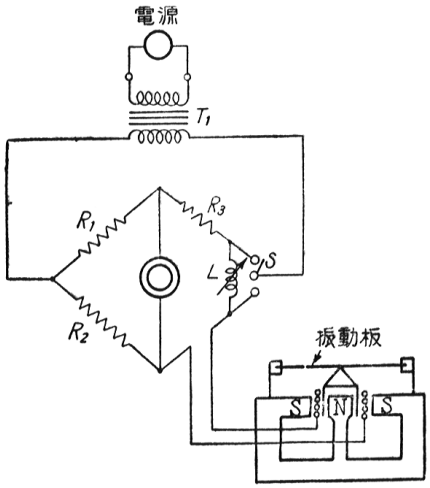
電気エネルギーを音響エネルギーに，またはその逆に交換を行う系を電気音響変換系[1]といい，電気音響学の最も重要な部分を占めているものである．これに属するものは，受話器，スピーカーおよび送話器，マイクロホンであり，電気音響理論もその当初は，これらの機器の動作を解析する手段として発達してきたものである．電気音響伝達系には可逆的なものと不可逆的なものとがあり，可逆的なものを電気音響変成系[2]と呼び，動電型変成，静電型変成，電磁型変成，圧電型変成，磁歪型変成，電歪型変成などがある．不可逆的なものを電気音響継電系[3]と呼び，炭素粒を用いるものがこれに属する．

## 5・5・1　動電型電気音響変成系[1]

動電型電気音響変成理論を理解するには，その基礎をなしている実験的事実を知らねばならない．可動線輪型高声器[2]は動電型電気音響変成器の好適の例であり，その構造は第 5・35 図に示すようなものである．その動作原理は電磁石または永久磁石の作る磁極紬隙[3]内にある可動線輪に音声周波交番電流を流すと線輪が電動作用[4]によって交番電流に応じた起振力を受けて運動を始めることを利用して，この可動線輪に固着した軽い振動板[6]により可動線輪の振動を空気に伝えることにある．この




第 5・35図 可動線輪型高声器の構造.




第 5・36図

---

(1)　electro-acoustic transducer

(2)　electro-acoustic transformer

小林(勝一郎)：“Electro-Acoustic Transformer について”電学誌，第44巻，651～663 頁，1925 年，“電気音響伝達系の設計に関する考案”電学誌，第49巻，1262～1276頁，1929 年.

(3)　electro-acoustic relay

(1)　electro-acoustic transformer of electro-dynamic type

(2)　moving-coil type speaker(dynamic speakert)

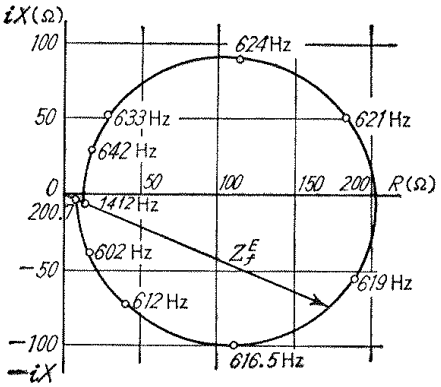
(3)　magnetic gap

(4)　motor action

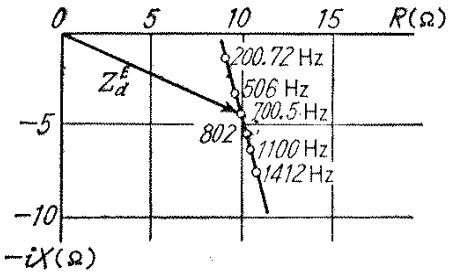
(5)　diaphragm

原理および構造は非常に簡単であるが，可動線輪の運動は非常に激しいので，可動線輪の運動や音響エネルギーの発生機構を単純に考えるわけには行かない．

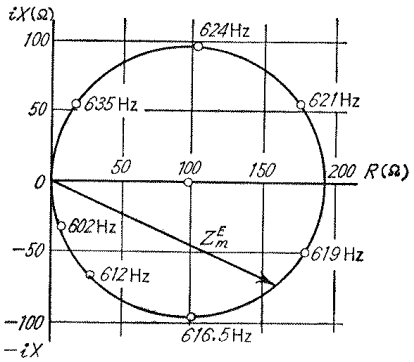
可動線輪型電気音響変成器の動作を解析するために，第 5·36 図のように，可動線輪を振動板に固定した変換器の電気的入力インピーダンスを交流ブリッジにより測定し，その周波数による変化を求めると，振動板が自由に振動し得る状態になっているときは，第 5·37 図 (a) のような形となる．これを電気的の自由インピーダンス $Z_f{}^E$ と呼ぶ．(6) 次に振動板を固定し，可動線輪が振動し得ないようにしておいて可動線輪の電気インピーダンスを測定すると，第 5・37 図 (b) のような形となり，



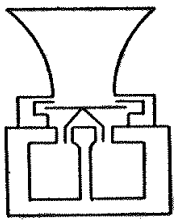

第 5・37 図 (a)　動電型電気音響変換器の電気自由インピーダンス
$Z_f{}^E = R_f{}^E - i X_f{}^E$ .



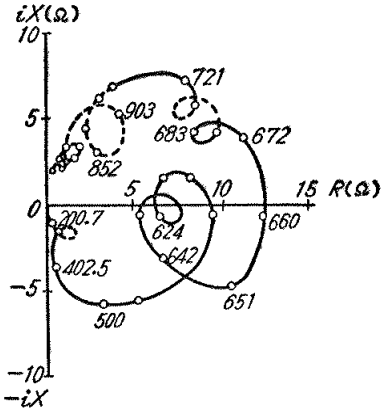

第 5・37 図 (b) 測定インピーダンス
$Z_d{}^E = R_d{}^E - i X_d{}^E$ .




第 5・38 図 動インピーダンス．



第 5・39 図 ホーンの取付．




第 5·40 図 ホーンを付けた動電型スピーカーの自由インピーダンス．

その値は著しく小さくなる．これを電気的の固定インピーダンス $Z_d{}^E$ と呼ぶ．(7) 今自由インピーダンスと固定インピーダンスとの差

$$Z_m{}^E = Z_f{}^E - Z_d{}^E \qquad (\Omega)$$

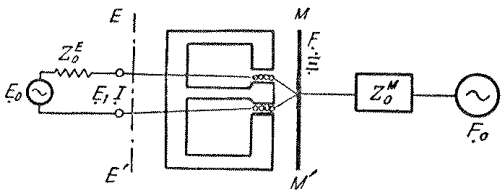
を角周波数について求めて図に示すと第 5·38 図のようになり，これは振動板が振動することによって可動線輪の電気インピーダンスが増加する量を示している．よってこれを電気的の動インピーダン

(6)　free impeadance

(7)　damped impeadance

ス[8]と呼び，電気音響学上重要な事実であって，[9]この測定結果をみると，可動線輪のみのインピーダンス $Z_d{}^E$ に比して，動インピーダンス $Z_m{}^E$ が非常に大きくなるような周波数が存在することが知られる．さらにこの振動板に第5・39図のようにホーンを取付けると，自由インピーダンスは第5・40図のようになり，その値が小さくなると共に多数のループが現われるようになる．[10]

動電型電気音響変換系の動作機構を解析するために，可動線輪の入力端子を電気端子 $EE'$ ，振動板の面上を機械端子 $MM'$ とし，両端子間のエネルギーの伝送を考える．第5・41図のように電気端子には内部抵抗 $Z_0{}^E$ なる電源が接続され，これより交番起電力 $E_0 e^{-i\omega t}$ が供給されるものとし，これによって電気端子 $EE'$ に現われる電圧と電流の実効値をそれぞれ $\dot{E}$ および $\dot{I}$ とする．機械端子である振動板には $Z_0{}^M$ なる機械インピーダンスが接続され，振動板面上には圧力の形で $\dot{F}$ なる力が作用し，速度 $\dot{\Xi}$ で一様に振動するものとする．さらに問題を一般化して論ずるために $MM'$ 端子から音圧が外力の形で作用する場合をも考え，$Z_0{}^M$ なる内部機械インピーダンスを通して起振力 $F_0 e^{-i\omega t}$ が作用するものと考える．このような電気系と振動系との組合せは，たとえば可動線輪型スピーカーに電気入力が加わると同時に，振動板側から音圧その他の形で交番起振力が加わる場合に相当する．実用的の見地から見れば，たとえば $\dot{F}_0 = 0$ とおけばスピーカーの動作を表わすことになり，$Z_0{}^M$ なる機械インピーダンスを負荷として持つ変換系の可動線輪に交番起電力が加った場合に振動板の有する速度と振動板面に生ずる力とが規定される．また $\dot{E} = 0$ とおけばダイナミックマイクロホンの動作を表わすことになり，$Z_0{}^E$ なる電気インピーダンスを負荷とする系に $\dot{F}_0$ なる交番機械力が加わった場合の電気端子の電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ が規定される．



第 5・41 図　動電型電気音響変換系．

今可動線輪のボビンの半径を $a_0$ とし，線輪の巻数を $N$ (回) とすると，可動線論の全長は

$$l = 2\pi a_0 n \quad \text{(m)}$$

である．磁極細隙の磁束密度を $B$ (tesla) とすると，[11]導体を流れる電流 $\dot{I}$ (A) によって綿輪の受ける力は

(1)　$$F = BlI = AI \quad \text{(N)}.$$

また線輪が $v$ (m/s)なる速度で運動する場合には，綿輪の端子に現われる起電力は

(2)　$$E = -Blv = -Av \quad \text{(V)}$$

---

(8)　motional impeadance

(9)　A.E.KENNELLY and G.W.PIERCE："The Impedance of Telephon Receiver as Affected by the Motion of Their Diaphragm" Proc. Am. Ac. Arts and Sc., Vol.48, Sept.1912.
K.KUROKAWA and T.HIROTA: "Motional Impedance Test of Loud speaker" 電学誌, 1927年8月.

(10)　黒 川："交流現象論"

(11)　1 tesla：$10^4$ gauss.

である．ここに

（3）　$A = Bl$　(N / A)　または　(W / m)

を動電型電気音響変換系の力係数[12]と呼ぶ．

今，第 5・41 図の電気端子 $EE'$における電圧の平衡を考えると，この電気回路は電流の波長に比して充分小さいものと考えられるからすべての位置で電流 $I$ は同時刻には同じ値を有するものと考えてよい．よって線輪の電気インピーダンス$Z_d{}^E$，線輪の振動速度 $\dot{\Xi}$ なる場合の $EE'$ 端子から線輪側を見た電圧の平衡式は

（4）　$\dot{E} - A\dot{\Xi} = Z_d{}^E \dot{I}$　(V)，

これに電源の起電力と内部インピーダンスを加えれば

（5）　$\dot{E}_0 = \left(Z_d{}^E + Z_0{}^E\right)\dot{I} + A\dot{\Xi}$　(V)．

次に機械端子 $MM'$ に おける力の平衡式を立てるために $MM'$ から線輪を見た機械インピーダンスを $Z_d{}^M$とすると，振動板と線輪とは一体になって運動すると見なすことができるので，共に同一の速度 $\dot{\Xi}$ を有すると考えられ，力の平衡式は

（6）　$\dot{F} + A\dot{I} = Z_d{}^M \dot{\Xi}$　(N)，

これに振源の起振力と内部インピーダンスを加えると

（7）　$\dot{F}_0 = \left(Z_d{}^M + Z_0{}^M\right)\dot{\Xi} - A\dot{I}$　(N)．

（5）および（7）が動電型電気音響変成理論の基本式である．

振動源の超振力 $F_0$ を無視しても良い場合（スピーカーの場合）には

（8）　$\dot{F}_0 = 0$

とおけば（6）（7）は

（9）　$\dot{E}_0 = \left(Z_0{}^E + Z_d{}^E + \dfrac{A^2}{Z_0{}^M + Z_d{}^M}\right)\dot{I}$　(V)，

$A\dot{I} = \dot{\Xi}\left(Z_d{}^M + Z_0{}^M\right)$　(N)

となる．この場合 $Z_0{}^M$ は振動板から音場を見た機械インピーダンスであり，前述の輻射インピーダンスに相当する．ここで

(10)　$Z_m{}^E = \dfrac{A^2}{Z_0{}^M + Z_d{}^M}$　(Ω)

とおくと，（9）の第1式は

(11)　$\dot{E}_0 = \left(Z_0{}^E + Z_d{}^E + Z_m{}^E\right)\dot{I}$　(V)

または

(12)　$\dot{E}_0 - Z_0{}^E\dot{I} = \left(Z_d{}^E + Z_m{}^E\right)\dot{I} = Z_f{}^E\dot{I}$　(V)

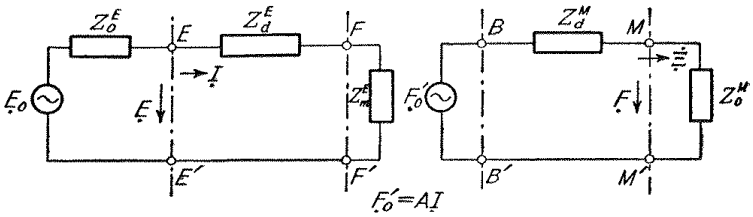
(12)　force factor

となる．ここに $Z_m{}^E$ は動インピーダンス，$Z_f{}^E$ は固定インピーダンス，$Z_f{}^E$ は自由インピーダンスに相当する．(9) の第二式は

(13)　$$\dot{F}_0{}' = A\,\dot{I} \qquad \text{(N)}$$

なる起振力が線輪中に生じ，それによって振動板が $\dot{\Xi}$ なる速度で励振されることを示している．よって (9) を用いてスピーカーの等価回路を第 5・42 図のように構成することができる．

第 5・42 図の左半は (9) の第一式を電気回路に表わしたもので，$Z_m{}^E$ 中で消費される電気エネルギーが機械的の振動エネルギーに変換されることを表わしている．図の右半は (9) の第二式を機械系の回路に表わしたもので，可動線輪の受ける力 $\dot{F}_0{}'$ によって機械端子 $M\,M'$ に生ずる力および速度を与える図である．




第 5・42 図 動電型スピーカーの等価回路．

この系の音響出力は，振動板面から見た輻射インピーダンス $Z_0{}^M$ の実数部を $R_0{}^M$ とおくと，

(14)　$$W_0{}^A = R_0{}^M \left|\dot{\Xi}\right|^2 = \frac{R_0{}^M \left|\dot{F}\right|^2}{\left|Z_d{}^M + Z_0{}^M\right|^2} \qquad \text{(W)}$$

であり，また電気端子から入る電力は

(15)　$$W_i{}^E = R_f{}^E \left|\dot{I}\right|^2 = \frac{\left|\dot{E}\right|^2}{R_f{}^E} \qquad \text{(W)},$$

ただし

(16)　$$R_f{}^E = R_e\left(Z_d{}^E + Z_m{}^E\right) = R_d{}^E + R_m{}^E = R_d{}^E + \frac{A^2\left(R_d{}^M + R_0{}^M\right)}{\left|Z_d{}^M + Z_0{}^M\right|^2} \qquad (\Omega),$$

$$\dot{F} = Bl\,\dot{I} \qquad \text{(N)}$$

であるから，スピーカーの効率は

(17)　$$\eta = \frac{W_0{}^A}{W_i{}^E} = \frac{(Bl)^2 R_0{}^M}{R_f{}^E \left|Z_d{}^M + Z_0{}^M\right|^2}$$

$$= \frac{(Bl)^2 R_0{}^M}{(Bl)^2\left(R_d{}^M + R_0{}^M\right) + R_d{}^E\left\{\left(R_d{}^M + R_0{}^M\right)^2 + \left(X_d{}^M + X_0{}^M\right)^2\right\}}$$

となる．

動電型マイクロホンの場合には，(5)(7) にて

(18)　$$\dot{E}_0 = 0$$

とおけば，スピーカーの場合と全く同様の方法で

(19)　$$-A\,\dot{\Xi} = \left(Z_d{}^E + Z_0{}^E\right)\dot{I} \qquad \text{(V)},$$

(19)
$$\dot{F}_0 = \left( Z_0{}^M + Z_d{}^M + \frac{A^2}{Z_d{}^E + Z_0{}^E} \right) \dot{\Xi} \qquad \text{(N)}$$

を得る．よって機械的動インピーダンスを

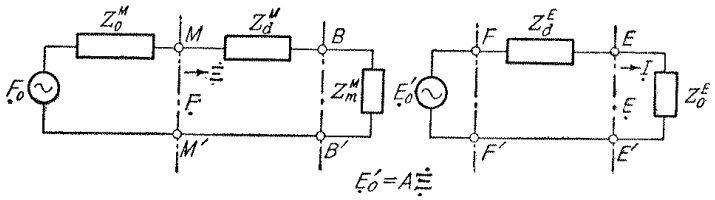
(20)
$$Z_m{}^M = \frac{A^2}{Z_d{}^E + Z_0{}^E} \qquad \text{(N・s/m)}$$

可動線輪内に誘起する起電力を

(21)
$$\dot{E}_0{}' = A\dot{\Xi} = \frac{AF_0}{Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_m{}^M} \qquad \text{(V)}$$

と表わせば，等価回路は第 5・43 図のように描かれる．

この場合，$\dot{F}_0$ と~~る~~ $Z_0{}^M$ とは振動板を駆動する振動源の起振力の大きさおよびその内部機械インピーダンスを表わすから，音波が振動板にあたるような場合には，振動板と音場との連続条件によって定められねばならないので一概には規定できない．しかし $Z_0{}^M$ ~~は~~はこの振動板を音源として用いるときの輻射インピーダンスと等しいと考えて良い場合か多い．$\dot{F}$ および $\dot{\Xi}$ は振動板面上に作用する力と振動板の振動速度であり，$Z_d{}^M$ と $Z_m{}^M$ は振動部分の機械的構造によって定められる．マイクロホンの場合には振動板に加わる音圧によって電気端子に現われる電圧 $\dot{E}$ （または $\dot{E}_0{}'$ ）が感度を定める重要な因子なのであって，変換されるエネルギーの大きさは大した問題ではない．$\dot{E}_0{}'$ が規定された場合に，$\dot{E}$ は電気端子の負荷インピーダンス $Z_0{}^E$ の函数として定められ




第 5・43 図 動電型マイクロホンの等価回路．

(22)
$$\dot{E} = \dot{E}_0{}' - I Z_d{}^E = \dot{E}_0{}' - \frac{\dot{E}}{Z_0{}^E} Z_d{}^E = \frac{Z_0{}^E}{Z_0{}^E + Z_d{}^E} \dot{E}_0{}' = \frac{AF_0 Z_0{}^E}{\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_m{}^M\right)\left(Z_0{}^E + Z_d{}^E\right)} \qquad \text{(V)}.$$

外部起電力 $\dot{E}_0$ および外部起振力 $\dot{F}_0$ が共に存在する場合にも，全く同様の操作で解析し，等価回路を作ることができる．しかしこれらの解析は振動角周波数 $\omega$ がある特定の値に固定されている場合にのみ正しいのであって，広い範囲に $\omega$ が変動する場合には，同一の等価回路で全領域を表現することは困難である．実際問題としては，なるべく広い周波数範囲にわたって特性が不変で，しかも能率の良いものが要求されており，現代の音響機器の設計の基礎方針はこの方向に向けられている．電気音響機器の詳細については章を改めて述べる．

### 5・5・2　静電型電気音響変成系

動電型電気音響変成系に次いで，比較的単純な概念で理解し得るものに静電型電気音響変成系[1]がある．これは蓄電器マイクロホン[2]として実用されている型式の電気音響変成方式であり，その機構

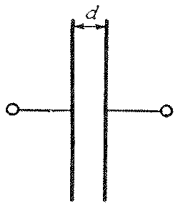
---

（1）　electro-acoustic transformer of electo static type
小林(勝一郎)：“Electro-static Electro-Mechanical Transformer の理論” 電気評論，第19巻，831-842頁，1931 年．

（2）　condencer microphone

は２枚の板状電極を対向させ，一方の電極を固定し，他方を可動電極として，可動電極の変位と電極間の電圧変動との間に変成作用を行わせるものである．

平板状の金属で作られた電極を２枚対向させたとき，その間隔が$d$(m)，その対向面が $S(\mathrm{m}^2)$ であれば，この２枚の電極が構成する蓄電器の容量は縁端効果を無視すると




第 5·44 図 平板蓄電器．

(23)　$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (\mathrm{F}),$$

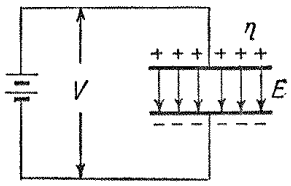
と表わされる．ここに $\varepsilon$ は電極間に挿入されている誘電体の誘電率[3]（電気誘導容量）であり，真空の場合には

(24)　$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad \mathrm{F/M^2},$$

真空以外の媒質の場合には

(25)　$$\varepsilon = k_e \varepsilon \quad (\mathrm{F/m})$$

である．(25) の $k_e$ は誘電媒質の電気誘導容量 $\varepsilon$ と真空の誘導容量 $\varepsilon_0$ との比であってこれを誘電体の固有誘電率あるいは比誘電率[4]と呼ぶ．空気その他の気体の固有誘電率はほとんど１であるから真空の場合と大した相違がない．




第 5・45 図

容量 $C$ なる蓄電器に $V$(V) なる直流電圧を加えると電極に現われる電荷量は

(26)　$$Q = CV \quad (\mathrm{C})$$

である．電極間の距離が面積に比して小さく，蓄電器内の電界が一様に極板と垂直な平行電界である場合には，極板上に現われる電荷の面密度は

(27)　$$\eta = \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon V}{d} \quad (\mathrm{C/m^2})$$

であり，また蓄電器内の空間の電界強度[5]は

(28)　$$E = \frac{V}{d} i_z \quad (\mathrm{V/m})$$

である．ここに $i_z$ は極板面に垂直に正電極から負電極に向う単位ベクトルである．なお

(29)　$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d} i_z = \eta i_z \quad (\mathrm{C/m^2})$$

を電気変位[6]または電気誘導度と呼ぶ．このような状態にある電極には互に吸引力が作用し，その力は

(30)　$$F = QE \quad (\mathrm{N}),$$

---

(3)　dielectric constant または inductive capacity

(4)　specific inductive capacity

(5)　electric field intensity

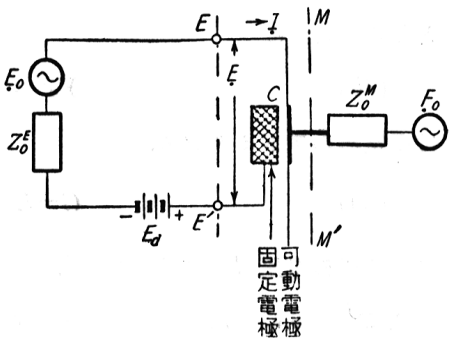
(6)　electric displacement

応力で表わせば

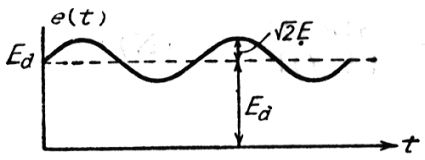
(31)　$$p = \eta E \qquad \text{(Pa)}$$

となる．

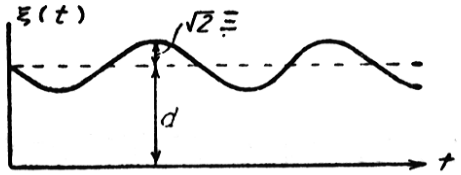
静電型電気音響変成系を一般的に解析するには，第5・46図のような回路を考えると都合がよい．すなわち容量 $C$ なる電気音響変成用の蓄電器に流起電力(7) $E_d$ ~~は~~と交流起電力 $\dot{E}_0$ とが内部インピーダンス $Z_0^E$ を通して直列に加わり，蓄電器の可動電極には機械内部インピーダンス $Z_0^M$ を通して外部起振力 $\dot{F}_0$ が作用するものとする．まず電気端子 $EE'$ における電圧の平衡式を求めるために，固定電極間から測った可動




第 5・46 図




第 5・47 図　　畜電器の電極電圧の変化．




第 5・48 図　　畜電器の電極間隔の変化．

電極の位置を $\dot{\Xi}$ (m) とし，電極電圧が第 5・47 図のように

(32)　$$e(t) = E_d + \sqrt{2}\,\dot{E} e^{-i\omega t}, \qquad (|\dot{E}| \ll E_d)$$

の形で変化したときにこれに従って可動電極の取る位置が第 5・48 図のように

(33)　$$\xi(t) = d - \sqrt{2}\,\dot{\Xi} e^{-i\omega t}, \qquad (|\dot{E}| \ll d)$$

の形となったと仮定すれば，蓄電器の容量は

(34)　$$c(t) = \frac{\varepsilon S}{\xi(t)} = \frac{\varepsilon S}{d} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}\,\dot{\Xi}}{d} e^{-i\omega t}\right)} \approx C_d \left(1 + \frac{\sqrt{2}\,\dot{\Xi}}{d} e^{-i\omega t}\right)$$

となり，蓄電器に貯えられる電荷量は

(35)　$$q(t) = c(t) \cdot e(t) = E_d C_d \left(1 + \frac{\sqrt{2}\,\dot{E}}{E_d} e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{2}\,\dot{E}}{d} e^{-i\omega t} + \frac{2\dot{E}\dot{\Xi}}{E_d d} e^{-i2\omega t}\right)$$

となる．よって蓄電器を流れる電流は，その二次の項を省けば

(36)　$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \approx -i\omega C_d \left\{\sqrt{2}\,\dot{E} e^{-i\omega t} + \sqrt{2}\,\dot{\Xi} \frac{E_d}{d} e^{-i\omega t}\right\} \qquad \text{(A)},$$

(7)　これを成極電圧と呼ぶ．

または実効値で表わして

(37)
$$\dot{I} = Y_d{}^E \left[ \dot{E} + G\dot{\Xi} \right] \qquad \text{(A)}$$

となる．ここに

(38)
$$Y_d{}^E = -i\omega C_d \qquad \text{(S)}$$

は蓄電器のアドミタンス，

$$G = E_d \,/\, d \qquad \text{(V/m)}$$

は直流成極電圧　$E_d$　よって電極間に生ずる電界強度である．

次に電極間に作用する力を求めると，外部起振力が作用しない場合には

(40)
$$f_c(t) = \int_s \eta E\, da = qE = c(t)\cdot e(t)\cdot \frac{e(t)}{\xi(t)}$$
$$= \frac{\varepsilon S}{\xi(t)}\cdot\frac{\left\{e(t)\right\}^2}{\xi(t)} = \frac{\varepsilon S\left\{e(t)\right\}^2}{\left\{\xi(t)\right\}^2} \qquad \text{(N)}$$

となるから，これを実効値で表わすと，

(41)
$$\dot{F}_c = GC_d\left(\dot{E} + G\dot{\Xi}\right) \qquad \text{(N)}$$

となる．よって電極を一定の振動速度に保つための力は $-\dot{F}_c$　となる．一方可動電極の速度は

(42)
$$\dot{\dot{\Xi}} = -i\omega\dot{\Xi} \qquad \text{(m/s)}$$

と表わされるから，(37) と (41) より静電型電気音響変成系の基本式は

(43)
$$\dot{I} = Y_d{}^E\dot{E} + A\dot{\dot{\Xi}} \qquad \text{(A)},$$
$$\dot{F} = -A\dot{\Xi} + \frac{A^2}{Z_d{}^E}\dot{\dot{\Xi}} \qquad \text{(N)}$$

と表わされる．ここに

$$A = GC_d \qquad \text{(C/m)}$$

は静電型電気音響変成系の力係数である．

(43) の第一式の第一項は蓄電器の電極電圧が交番変動をするために蓄電器に流れる電流の大きさを表わし，第二項は可動電極が振動するために蓄電器に流れる電流の大きさを示し，第二式は電極電圧が交番するために電極に生ずる力を表わしている．

次に振動板の機械的負荷インピーダンス $Z_0{}^M$　および振動板自身の機械インピーダンス $Z_d{}^M$　を考えて機械端子 $M\,M'$ における力の平衡式を書くと，外部起振力の作用をも考えれば

$$\dot{F}_0 + \dot{F} = \left(Z_0{}^M + Z_d{}^M\right)\dot{\dot{\Xi}}$$

となるから，(43) の第二式は

(45)
$$\dot{F}_0 + A\dot{E} = \dot{\Xi}\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M - \frac{A^2}{Y_d{}^E}\right)$$
$$= \dot{\Xi}\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)$$

となる．同様に（43）の第一式に外部起電力 $\dot{E}_0$ とその内部インピーダンス $Z_0{}^E$ とを附加すると

(46)
$$\dot{E}_0 = \dot{E} + Z_0{}^E\,\dot{I} = \left(Z_0{}^E + Z_d{}^E\right)\dot{I} - AZ_d{}^E\,\dot{\Xi}\,,$$
$$Z_d{}^E = 1\big/Y_d{}^E$$

となる．よって静電型電気音響変成系の一般式として

(47)
$$\dot{E}_0 + Z_d{}^E A\dot{\Xi} = \left(Z_d{}^E + Z_0{}^E\right)\dot{I} \qquad \text{(V)}\,,$$
$$\dot{F}_0 + A\dot{E} = \left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)\dot{\Xi} \qquad \text{(N)}$$
$$\frac{1}{Z_d{}^E} = Y_d{}^E = -i\omega C_d\,, \qquad Z_n{}^M = -\frac{A^2}{Y_d{}^E}\,, \qquad A = GC_d\,,$$
$$G = \frac{E_d}{d}\,, \qquad C_d = \frac{\varepsilon S}{d}$$

を得る．

起振力 $F_0$ が加わらぬ場合には，振動板に $Z_0{}^M$ なる機械インピーダンスが負荷された畜電器型高声器となる[8]．この場合に $EE'$ 端子から蓄電器の方を見た等価回路を求めるために（47）から

(48)
$$A\dot{E} = \left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)\dot{\Xi} = Z_t{}^M\,\dot{\Xi}\,,$$

(49)
$$\dot{\Xi} = \frac{A}{Z_t{}^M}\dot{E}$$

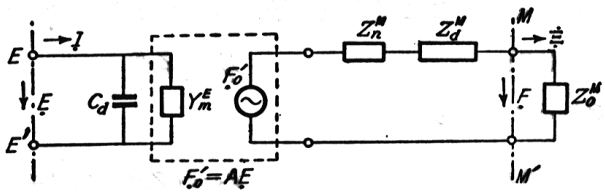
を求めて（43）に代入すると

(50)
$$\dot{I} = \left(Y_d{}^E + \frac{A^2}{Z_t{}^M}\right)\dot{E} = \left(Y_d{}^E + Y_m{}^E\right)\dot{E}$$

となる．ここに

(51)
$$Y_m{}^E = \frac{A^2}{Z_t{}^M} = \frac{A^2}{\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)} \qquad (\Omega)$$

は電気的の動アドミタンス[9]である．よって静電型高声器の電気端子から見た等価回路は第5･49 図のように描かれる．この回路は機械系の部分を全部電気系に換算して1個の電気回路で置換することができる．それには



第 5･49 図　静電型スピーカーの等価回路

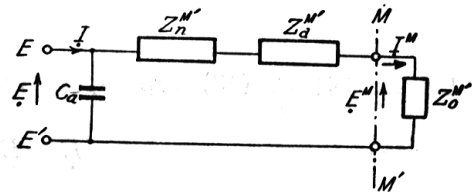
（8）　condenser speaker

（9）　motional admittance

(52)
$$Z_0{}^{M'} = \frac{Z_0{}^{M}}{A^2}, \qquad Z_d{}^{M'} = \frac{Z_d{}^{M}}{A^2}, \qquad Z_n{}^{M'} = \frac{Z_n{}^{M}}{A^2}$$

とおき，第 5・50 図のようにすればよい．この場合 $MM'$ に現われる電流 $\dot{I}^M$ および電圧 $\dot{E}^M$ は

(53)
$$\dot{I}^M = A\dot{\Xi},$$
$$\dot{E}^M = \frac{\dot{F}}{A}$$




第 5･50 図　静電型スピーカーの等価回路（2）．

であり，$Z_0{}^M$ 中で消費される電力は

(54)
$$W = \dot{E}^M \cdot \dot{I}^M = \dot{F} \cdot \dot{\Xi} \qquad \text{(W)}$$

である．

静電型電気音響変換系に現われる機械インピーダンス $Z_n{}^M$ は

(55)
$$Z_n{}^M = -\frac{A^2}{Y_d{}^E} = \frac{A^2}{i\omega C_d} = -i\frac{A^2}{\omega C_d} \qquad \text{(N･s/m)}$$

なる負性のスティフネス(10)の単位を持った項であり，これが振動板の機械インピーダンスと[illegible]加わっている．したがって振動板のスティフネスは$Z_n{}^M$ だけ減少することになる．このことば静電型変成における重要な性質である．

蓄電器型マイクロホンの場合には（47）にて

(56)
$$E_0 = 0$$

とおく．この場合に $Z_0{}^E$ はマイクロホンの電気的負荷インピーダンスを表わし，このインピーダンスの両端の電圧が電気的出力として利用される．マイクロホンとしての動作を解析するには，$\dot{F}_0$ なる起振力が使[illegible]たときに蓄電器端子に現われる起電力を知る必要がある．

（47）は $E_0$ が零のときは

(57)
$$Z_d{}^E A\dot{\Xi} = \left(Z_d{}^E + Z_0{}^E\right)\dot{I} \qquad \text{(V)},$$
$$\dot{F} = \left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)\dot{\Xi} - A\dot{E} \qquad \text{(N)}$$

とかけるが，ここで電気端子に現われる電圧 $\dot{E}$ は

(58)
$$\dot{E} = \dot{I}\, Z_0{}^E$$

であることより

(59)
$$\dot{F}_0 = \left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M - \frac{Z_d{}^E}{Z_d{}^E + Z_0{}^E}A^2\right)\dot{\Xi}$$

となる．よって静電型マイクロホン一般式は

(10)　negative stiffness

(60)
$$\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M + Z_m{}^M\right)\dot{\Xi} = \dot{F}_0 \qquad \text{(N)},$$

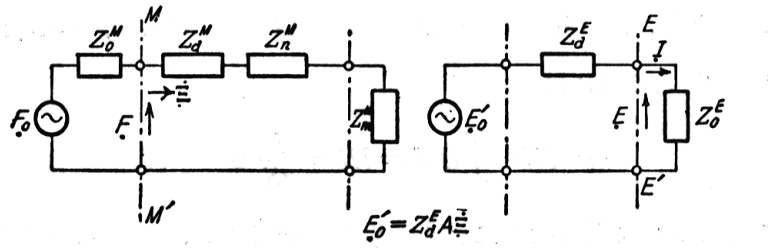
$$\dot{I} = \frac{Z_d{}^E A}{Z_d{}^E + Z_0{}^E}\dot{\Xi} \qquad \text{(A)},$$

$$\dot{E} = Z_0{}^E \dot{I} \qquad \text{(V)}$$

となる．ここに

(61)
$$Z_m{}^M = \frac{-Z_d{}^E A}{Z_d{}^E + Z_0{}^E} \qquad \text{(N・s/m)}$$

は機械的の動インピーダンスである．これを等価回路で示せば第 5・51 図のようになる．




第 5・51 図 静電型マイクロホンの等価回路．

(60) において

(62)
$$\left(Z_0{}^M + Z_d{}^M + Z_n{}^M + Z_m{}^M\right) = Z_t{}^M + Z_m{}^M \qquad \text{(N・s/m)}$$

とおくと，端子電圧と印加起振力との間には

(63)
$$\dot{E} = \frac{Z_0{}^E \cdot Z_d{}^E}{Z_0{}^E + Z_d{}^E} \cdot \frac{A\dot{F}_0}{Z_t{}^E + Z_m{}^E} \qquad \text{(V)}$$

の関係がある．(52) のような変換によって第 5・50 図に相当する等価回路を作ることができる．

~~6・5・3~~　電磁型電気音響変成系・磁気回路の基本的性質

電磁型電気音響変成系は，[1]電気音響機器として最も古くから用いられているものである~~が~~．その解析は前に述べた二者よりもやや複雑である．よってここではまず磁気回路に関する基本事項を説明し，その後で電磁型変成の理論を説明する．

a．磁気回路　磁束がある一定の閉じた領域から外に出ないように作られた空間内では磁束回路の~~の~~概念が成立する．このようなものは，たとえば，導磁率 $\mu$ の大きな物質を環状にして作った領域内とかまたは空心のトロイダル線輪の内部の空間などである．

磁気回路に $\Phi$ (weber) の磁束を生じさせるために，$I$ (A) の電流が流れている導線を $N$ 回この磁気回路に巻きつけたとする．[3]この磁気回路から漏洩する磁束は無視し得る程度の微少量であるものとすると，この $\Phi$ なる磁束は磁気回路に加えられた超磁力[4]

---

(1)　electro-acoustic transformer of electromagnetic type

(2)　magnetic circuit

(3)　磁束が空間を貫通する形は必ず閉じた形（環状）をなし磁束の始端や終端はない．

(4)　magneto motive force

(64)　$$m = N I \qquad \text{(amper)}$$

によって生じたものと考えられる．磁気回路の断面積が $S$ (m$^2$) であれば，この断面上の平均の磁束密度[5]は

(65)　$$B = \frac{\Phi}{S} \qquad \text{(T)}$$

で表わされるから，この断面上の平均の磁界強度[6]は

(66)　$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S} \qquad \text{(A / m)}$$

となる．ここに $\mu$ は磁気回路を構成する煤質の導磁率[7] (henry/meter) である．磁気回路を一周する中心線の長さを $l$ とし，$l$ に沿う断面積が至る所一様に $S$ であり，かつ $\mu$ も一様であるとすれば，起磁力 $m$ と磁束 $\Phi$ との間には

(67)　$$m = N I = \oint H d s = H l = \frac{l}{\mu S}\Phi \qquad \text{(A)}$$

なる関係がある．ここに $d s$ は磁気回路に沿う微小な線分である．もしも断面積 $S$ と導磁率が一様でない場合には

(68)　$$m = \oint \frac{\Phi}{\mu S} d s \qquad \text{(A)}$$

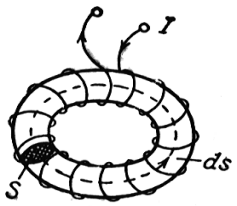
を用いればならぬ．(67) において

(69)　$$\Re = \frac{l}{\mu S} \qquad \text{(H}^{-1}\text{)}$$

を磁気リラクタンス[8]と呼びその逆数

(70)　$$\Re = \frac{\mu S}{l} = \frac{1}{\Re} \qquad \text{(H)}$$

を磁気バーミアンス[9]と呼ぶ．なお電流 $I$ を励磁電流[10]，$N$ 回巻いた線輪を励磁線輪[11]と呼ぶ．




第5・52図　トロイダル型磁気回路．

励磁線輪に流れる励磁電流によって磁気回路に $\Phi$ なる磁束が発生すると，磁気回路の磁束が変動するので，線輪に逆起電力[12]が誘発される．その大きさは

(71)　$$E = -N\frac{d\Phi}{d t} = -N\frac{d\Phi}{d I} \cdot \frac{d I}{d t} \qquad \text{(V)}$$

である．ここに $\dfrac{d\Phi}{d I}$ は単位電流と鎖交する磁束数であって定数と考えられ

---

(5)　magnetic flux dencity
(6)　magnetic field intensity
(7)　magnetic permiability, または magnetic inductive capacity,
(8)　magnetic relactance, 磁気抵抗
(9)　magnetic permiance
(10)　exciting current
(11)　exciting coil または field coil
(12)　counter E.M.F.

(72)　$$L = N\frac{d\Phi}{dI} \qquad \text{(H)}$$

をこの回路の自己誘導係数[13]という．これを用いれば誘導起電力は

(73)　$$E = -L\frac{dI}{dt} \qquad \text{(V)}$$

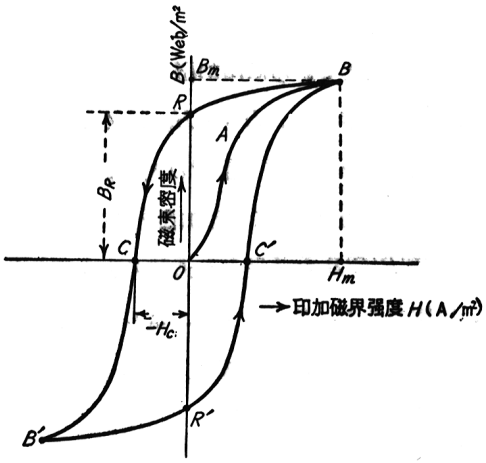
と書け，またこの回路は貯えられる磁気エネルギーは

(74)　$$W = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \text{(J)}$$

と表わされる．

ｂ．鉄磁性　磁気回路を構成するためには，鉄のような強磁性材料[14]で閉じた回路を作り，その回路の一部に起磁力を作用させて，回路中に磁束を貫通させればよい．このような磁気回路を利用するにあたっては，強磁性体の性質を知っておくことが必要である．

強磁性体の磁気的性質を表わす最も基本的なものは磁化曲線である．これは第 5・53 図に示すようなもので，磁性材料で作られた磁気回路に加わる起磁力によって生ずる磁界強度 $H$ (A/m) と磁性材料内に生ずる磁束密度 $B$ (T) との関係を示す曲線である．磁化されていない磁性材料を初めて磁化する場合には，印加起磁力を加えるまでは磁束は生じないから，その状態は $O$ 点 ($H=0$，$B=0$) で表わされる．次に印加起磁力を加えてその強さを次第に増して行くと印加磁界強度 $H$ が次第に増加し，それにしたがって磁性体内に貫通する磁束密度 $B$ は $OAB$ の曲線にしたがって増加する．このときの曲線 $OAB$ を初磁化曲線と呼ぶ．初磁化曲線の傾斜 $\frac{\partial B}{\partial H}$ は $H=0$ の近くでは余り大きな値ではなく，$H$ が増加するにしたがって次第に増大し，ある特定の $H$ の値の近傍で最大値に達し，これ以上 $H$ が増大すると傾斜は減少し始め次第に零(水平)に近づく．磁化曲線の傾斜は導磁率を表わすが，強磁性体の導磁率は磁界強度の函数あるいは磁束密度の函数として表わされねばならず




$OAB$: 初磁化曲線
$B_s$: 残留磁束密度
$-H_c$: 保持力

第5・53 図 磁化曲線(履歴曲線)．

(75)　$$\mu = \frac{\partial B}{\partial H} = k_m(H)\cdot\mu_0 \qquad \text{(H/m)}.$$

印加起磁力が大きくなると，磁界強度 $H$ が変化しても磁束密度 $B$ がほとんど変化しないような状

(13)　self inductance

(14)　feromagnetic substance

態となる．これを飽和現象[15]と呼び，このときの磁束密度は飽和磁束密度と呼ばれる．初磁化曲線は，$O$ 点から $OB'$ の方向にも存在し，この形は $OAB$ と全く点対称形である． $OB'$ の方向の初磁化曲線を求めるには最初に磁気回路に加える起磁力の方向を逆向きとすればよい．ただし初磁化曲線はいずれか一方しか求めることができない．

初磁化曲線 $OAB$ に沿って $B$ 点( $H=H_m$ ， $B=B_m$)まで磁化してから，磁界強度 $H$ を減少させると磁束密度は $BR$ に沿って変化し，印加磁界強度 $H$ を零としても貫通磁束密度は零とならず，$B_r$ (T) だけの磁束密度が残る．これを $B_m$ (T) まで磁化した場合の残留磁束密度[16]と呼ぶ．次に印加起磁力の方向を逆転し，前と反対の極性にして次第にその強さを増して行くと，貫通する磁束密度は $RC$ の曲線に沿って次第に減少し， $H=H_c$ (A/m) なる点で磁束密度が零となる．このことは $H_c$ (A/m)なる磁界強度を丁度打消すような起磁力の分布傾度が磁性体内に生じていることを意味する．よって $-H_c$ (A/m) なる起磁力分布傾度[17]を $B_m$ (T) まで磁化した場合の保持力[18]と呼ぶ．残留磁束密度 $B_r$ と保持力 $-H_c$ (A/m)は強磁性材料の基本的性質を表わす重要なパラメータである．

$H_c$ を越えてさらに印加磁界強度の大きさを増加すると，磁束密度は $CB'$ の曲線に沿って飽和曲線を描いて変化し， $H=-H_m$ にて $B=-B_m$ となり， $B$ 点の $O$ に関する対称点 $B'$ に到達する．この状態から印加磁界強度の大きさを減少させると，磁束密度は $B'R'C'B$ の径路を経て再び $B$ 点に戻る．したがって，印加磁界強度 $H$ を $H_m$ と $-H_m$ の間で連続的に変化させれば磁束密度は $BRCB'R'C'B$なる閉じた通路の上を回転運動する．このような図形を履歴曲線[19]と呼ぶ．

履歴曲線を一周すると，エネルギー損失を生ずる．これを履歴損失[20]と呼ぶ．第 5・52 図のトロィダル磁気回路について履歴損失を計算してみよう． $\delta t$ なる時間内の励磁電流の平均値を $I$ とすれば消費エネルギーは

(76) $$\delta W=\left(-E\right)I\delta t \qquad \text{(J)}$$

と表わされるが，(71) より回路の逆起電力は

(77) $$E=-NS\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{(V)}$$

であるから，(67) を用いて

(78) $$\delta W=INS\delta B=SlH\delta B\ ,$$

よって履歴曲線を一周したときの損失は

(15) saturation

(16) residual flux density,remanent flux density

(17) magneto-motive force gradient，単位長あたりの起磁力の分布密度.

(18) coercive force

(19) hysterisis loop

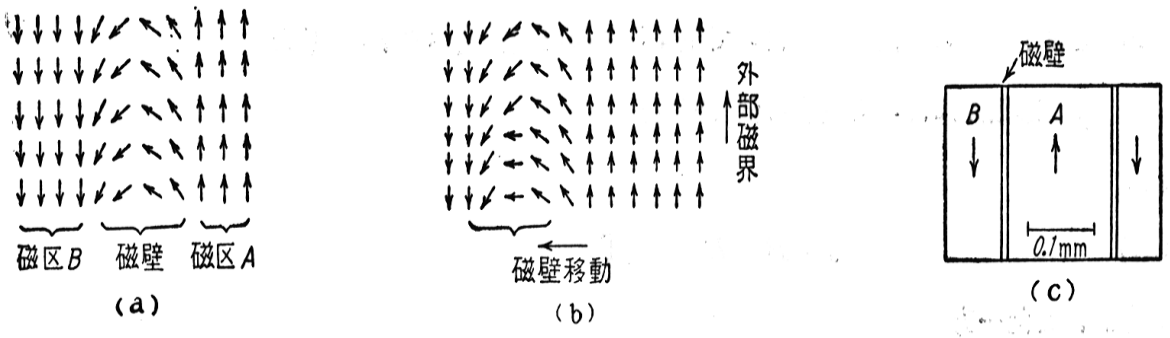
(20) hysterisis loss

(79)
$$W = \oint \delta W = S\,l \oint H\,dB$$

= (磁気回路の容積) × (履歴曲線の面積)　(J).

強磁性体を構成する原子は，それ自身が1個の微小磁石の性質を有するものと考えられている．すなわら原子は一つの方向に磁化されており，外部磁界の作用を受けると，原子の磁軸が外部磁界の方向と平行になるように回転しようとする力を生ずる．このような原子が集合してできている磁性体は各原子の磁軸の方向が不揃の場合には各原子磁極によって生ずる磁界が互に打消し合いので外見上は磁化されていないように見えるが，一たび印加磁界を加えると，各原子の磁軸が回転いはじめて一方向に揃うような傾向を生ずるので，外部に強い磁化が現われるようになる．印加磁界を取り去った後にも原子磁軸の方向が不揃いとならずに揃っているものは残留磁束密度が大きく，また印加磁界によって鉄原子が回転しにくいものは保持力が大きく，これらが履歴現象に関係する．また一定の印可磁界の作用を受けたときに回転し得る原子磁極が全部回転してしまえばこれ以上磁化は増さなくなるので飽和現象が現われる．

実際の強磁性体においては原子の磁軸が自由勝手な方向を向いているのではなく，原子か多数集合して磁区[20]を構成している．一つの磁区の内では，すべての原子磁極の方向は特定の方向に平行して揃っていて，その隣りの磁区の原子磁極の方向はこれと逆方向を有している．このような磁区が多数集合して平衡のとれた状態であれば外部には磁化が現われない．[21] 互に逆向きの二つの磁区の間には分子磁極が方向を遷移する層があり，これを磁壁[22]と呼ぶ．これらは第5・5[illegible] (a) と (c) とに示してある．外部磁界が磁区の分子磁極の方向と平行に加えられると，第5・55図 (b) のように




第 5・54 図　　鉄の単結晶 100 面(電解研摩).

磁壁が移動し，その結果各磁区の間の平衡が失われ，磁性体は外部磁界の方向に磁化されたことになる．磁壁の移動はその部分の分子磁極の回転によるのであって，これが履歴現象の原因となる．

磁気回路として強磁性体を利用する場合には，磁化や強磁性の現われる機構を原子構造論的に表現することよりも，磁気回路内の磁束密度と，これを生ずるために加える印加起磁力との間の関係を知

(20)　magnetic domain

(21)　高木 (豊)：“強磁性体の分域構造”科学，第 20 巻，292-297 頁，1950 年，7月号.

(22)　magnetic wall

ることが重要である．この見地[23]から，導滋率 $\mu$ なる鉄心を有するトロイダル線輪に（64）の形の起磁力が加わった場合の鉄心内の磁束密度を求めると

(80)
$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mu N I}{l} = \mu H = k_m \mu_0 H = k_m B_0 \qquad (\mathrm{T}),$$

$$k_m = \frac{\mu}{\mu_0}, \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad (\mathrm{H/m})$$

となる．ここに $\mu_0$ は真空の導磁率，$k_m$ は磁気回路材料の比導磁率，$B_0$ は真空煤質の磁気回路に

(81)
$$H = \frac{N I}{l} \qquad (\mathrm{A/m})$$

なる起磁力分布傾度が作用したときに生ずる磁束密度である．

強磁性体が存在する領域の磁界強度と印加起磁力との関係は複雑であって簡単には取り扱えないが，単純な解析をするためには，磁性体を取り除いた後に残る真空領域を励磁線輪によって磁化する場合に生ずる磁束密度を $B_0$ とし，またこのような磁界内に磁性体を置いた場合に原子磁軸の回転によって生ずる誘導磁束を含む合成内部磁束を $B$ とし，磁性体内部に生ずる起磁力分布傾度を

(82)
$$H_t = k_m H \qquad (\mathrm{A/m})$$

これに応ずる磁束密度を

(83)
$$B = \mu_0 H_t = \mu H = k_m B_0 \qquad (\mathrm{T})$$

と表わし，磁性体の代りに真空中に原子磁極が分布しているものと仮定して考える．一般に

$B$ を合成平均磁束密度ベクトル（T），

$B_0$ を励磁線輪により真空中に生ずる磁束密度ベクトル（T），

$B_i$ を原子磁極の方向転化によって生ずる誘導磁束密度ベクトん（T）
（内部磁界によって生ずる磁束密度）

とすれば

(84)
$$B = B_0 + B_i \qquad (\mathrm{T})$$

と表わされ，また一方

(85)
$$B = k_m B_0$$

とも表わされるので，内部磁界による磁束密度は

(86)
$$B_i = \left(k_m - 1\right) B_0 = \chi_m B_0$$

となる．ここに $\chi_m$ のは磁化率または帯磁率[24]である．

今古典理論にしたがって磁化の強さ[25] $M$ を

---

(23)　巨視的見地 macroscopic view ； mictoscopic view（微視的見地）に対する語．

(24)　susceptibility

(25)　jntensity of magnetization

(87)
$$M = \left(k_m - 1\right) H = \frac{k_m - 1}{\mu} B = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) B = \frac{B}{\mu_0} - H \qquad \text{(A / m)}$$

と定義すると，磁束密度は

(88)
$$B = \mu_0 \left(H + M\right) = B_0 + \mu_0 M \qquad \text{(T)}$$

と書ける．よって（84）と比較すると内部磁界による磁束密度は

(89)
$$B = \mu_0 M = \chi_m B_0 = \chi_m \mu_0 H \qquad \text{(T)}.$$

よって磁化率は

(90)
$$\chi_m = \frac{M}{H} = k_m - 1 \qquad \text{(数値)}$$

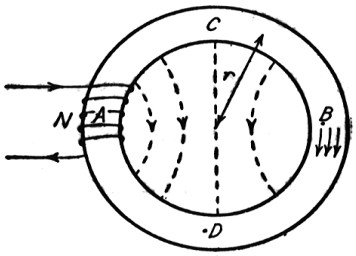
となる．なお磁性体が存在するために磁束密度が増加することは磁性体自身の中に起磁力の分布傾度が増加していることを意味し，その値は

(91)
$$H_i = M = \left(k_m - 1\right) H = \left(k_m - 1\right) \frac{I N}{l} = \chi_m \frac{I N}{l} = \frac{k_m}{\mu} B_i = \frac{B_i}{\mu_0} \qquad \text{(A / m)}$$

である．

c. 励磁線輪が一部分に集中した磁気回路　磁性体で磁気回路を形成し，その一部分に励磁線輪を集中して励磁すると，回路内を貫通する磁束の他に第5・55図の点線で示すように回路から出て通路を短絡する磁束が現われる．これを漏洩磁束[26]と呼び，磁気回路にとっては無視することのできないものである．

漏洩磁束の値を求めるために，回路の形を中心線の半径が $r$ である環形とし，回路の励磁線輪の中央の位置を $A$，これの反対側を $B$，$AB$ と直交する直径上の点を $C$，$D$ と名付け，回路内を貫通する磁束の磁束密度を $B$ とし，漏洩による $B$ の変化は無視し得るものとし，$B$ は回路内の至る所で一定であると仮定して，励磁線輪の起磁力が $IN$ である場合の $ACBD$ なる回路に沿う磁束について（67）より起磁力の平衡式を作ると



第 5・55 図　漏洩磁束.

(92)
$$\oint B\, ds = \mu I N,$$

または

(93)
$$\frac{B}{\mu} \cdot 2\pi r = I N \qquad \text{(A)}$$

と書ける．次に $CD$ を通る漏洩磁束を $B_L$ とし，$ACDA$ なる回路に沿って（92）を計算すると

(94)
$$\frac{B}{\mu} \cdot \pi r + \frac{B_L}{\mu_0} \cdot 2r = I N \qquad \text{(A)}$$

となる．よって（93）と（94）より

(26)　leakage　flux

(95) $$B_L = \frac{\pi}{2}\frac{\mu_0}{\mu}B = \frac{\pi}{2k_m}B \qquad (\mathrm{T})$$

または漏洩率は

(96) $$\frac{B_L}{B} = \frac{\pi}{2k_m}$$

となる．(96) によれば漏洩率は比導磁率 $k_m$ に反比例することが示されている．したがって鉄のように $k_m$ が数百以上数千に達するものでは，磁気回路内の磁束密度に比して，漏洩磁束密度はほとんど無視し得る程度である（第5・4表）．よって

第 5·4 表　漏　洩　率.

| 比導磁率 $k_m$ | 漏 洩 率　$B_L/B$ | | |
|---|---|---|---|
| 500 | 0.003 18 | または | 0.318 % |
| 1 000 | 0.001 57 | 〃 | 0.157 〃 |
| 2 000 | 0.000 785 | 〃 | 0.078 5 〃 |
| 3 000 | 0.000 523 | 〃 | 0.052 3 〃 |
| 5 000 | 0.000 318 | 〃 | 0.031 8 〃 |
| 10 000 | 0.000 015 7 | 〃 | 0.015 7 〃 |

比導磁率の大きな磁気回路内の磁束密度は（93）より

(97) $$B \approx \frac{\mu I N}{2\pi r} = \frac{2k_m I N}{r} \times 10^{-7} \qquad (\mathrm{T})$$

と見なして差支えない．よって磁気回路内の磁束密度を大きくするには~~に~~ $k_m$ の大きな材料を用い，巻数 $N$ を多くし，かつ電流 $I$ を大きくすると同時に回路の寸法 $r$ を小さくすることが必要であることがわかる．たとえば

$$k_m = 1000, \quad N = 1000 \text{ 回}$$
$$I = 100 \text{ mA} = 0.1 \text{ A},$$
$$l = 2\pi r = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$
$$r = \frac{0.1}{2\pi} \text{ m}$$

なる場合には

$$B = \frac{2\pi \times 2 \times 10^5}{0.1} \times 10^{-7} = 40\pi \times 10^{-2} = 1.256 \text{ T}$$
$$= 12\,560 \text{ gauss}$$

となる．

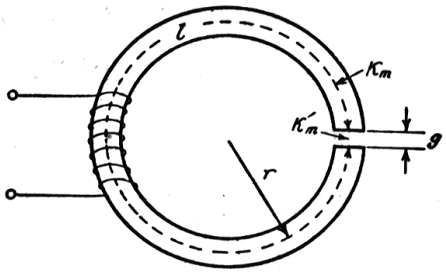
d. 空隙を持つ磁気回路　磁気回路の一部分が切れて，極めて狭い幅の空隙となっているものは，実用上重要である（第 5・56 図）．今磁性体部分の長さを $l$，空隙の長さを $g$ とし，空隙の中は導磁率 $k_m'$ なる煤質で~~散されている~~ものとする．回路の全長は

(98)　$$l + g = 2\pi r \qquad \text{(m)}$$

であり，磁性体内の磁束密度 $B$ によって磁性体内には内部起磁力分布傾度が生ずるから，この回路に加わる全起磁力は（86）より

(99)　$$m_t = I N + \frac{\left(k_m - 1\right)}{\mu} l B + \frac{\left(k_m{}' - 1\right)}{\mu'} g B \qquad \text{(A)},$$

全起磁力を平均した起磁力の分布傾度は




第5・56 図　空隙を有する磁気回路.

(100)　$$H_t = \frac{m_t}{l + g} \qquad \text{(A/m)}$$

と書ける．この $H_t$ に応じた磁束密度を求めると

(101)　$$B = \mu_0 H_t = \frac{\mu_0 I N}{l + g} + \frac{B}{\cancel{\mu_0}\left(l + g\right)}\left(\frac{k_m - 1}{k_m} l + \frac{k_m{}' - 1}{k_m{}'} g\right) \qquad \text{(T)}$$

となるからこれにより $B$ を求めると

(102)　$$B = \frac{\mu_0 I N}{\dfrac{g}{k_m{}'} + \dfrac{l}{k_m}} = \frac{k_m k_m{}' \mu_0 I N}{k_m{}' l + k_m g},$$

漏洩率は

(103)　$$\frac{B_L}{B} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{k_m{}'}{k_m} \cdot \frac{2g}{l}\right)$$

となる．もしも（$l/k_m$）（$g/k_m$）であれば

(104)　$$B \approx \frac{k_m{}' \mu_0 I N}{g} = \frac{4\pi k_m{}'}{g} I N \times 10^{-7} \qquad \text{(T)}$$

となり，回路を通る磁束 $B$ は空隙の寸法と比導磁率および励磁線輪の起磁力のみで決定される．空心，空隙付鉄環，完全な鉄環について $B$ を計算する式を比較すると第 5·5 表の通りとなる．

第 5・5 表 各種磁気回路の磁束密度の比較.

| | 空　心 | 空 隙 付 鉄 環 | 閉じた鉄眼 |
|---|---|---|---|
| 一 般 式 | $B_0$ | $\dfrac{\mu I N}{l + k_m g} \approx \dfrac{l}{g} B_0$ | $k_m B_0$ |
| $k_m{}' = 1$<br>$k_m = 2000$<br>$\dfrac{l}{g} = 20$ | $B_0$ | $20 B_0$ | $2000 B_0$ |

また（102）を

(105)　$$I N = \left(\frac{g}{k_m{}'} + \frac{l}{k_m}\right)\frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{k_m{}' \mu_0} g + H l \qquad \text{(A)}$$

と書けば，$H$ はこの磁気回路中に $B$ を生ずるのに必要な起磁力分布傾度である．

e. 励磁線輪の超磁力分布傾度・空隙の補正　磁気回路に与えられた磁束密度を生ずるのに必要な

励磁線輪の印加起磁力分布傾度 $H$ を求めて見よう．磁性体のないときに綿輪によって生ずる起磁力分布傾度を $H_0\,(\mathrm{A/m})$ とする．磁性体内には（91）に示した

(106)　$$H_i = \frac{k_m}{\mu} B_i \qquad (\mathrm{A/m})$$

なる内部起磁力分布傾度が存在するが，磁性体外では $H_i$ の影響はなく $H_0$ のみであると考えられ，磁性体外では

(107)　$$\oint H_0\, ds = \int H_0\, ds = IN \qquad (\mathrm{A})$$

と表わされることになる．

磁束密度が $B$ であるための全起磁力分布傾度は（83）より

(108)　$$H_t = \frac{B}{\mu_0}$$

と書けるから，励磁線輪による印加起磁力分布傾度は

(109)　$$H = H_t - H_i = \frac{B}{\mu_0}\left(1 - \frac{k_m - 1}{k_m}\right) = \frac{B}{\mu} \qquad (\mathrm{A/m})$$

となる．これは形を変えれば

(110)　$$B = B_0 + B_i = k_m B_0$$

ともなり，（85）と同形となる．

磁気回路に作用する全起磁力を求める場合に，回路を短い区間に分けて

(111)　$$m = IN = \oint H\, ds = \sum_{i=1}^{i} H_i l_i$$

として求めると便利なことがある．

磁気回路に空隙があると漏洩磁束が増加する．これを補正するには回路を貫通する全磁束の $\Phi\,(\mathrm{Wb})$ と空隙を通る磁束の $\Phi_g\,(\mathrm{Wb})$ との比で示される漏洩係数(7)

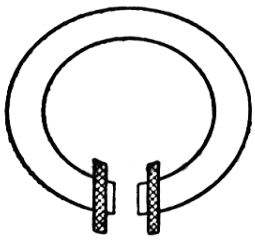
(112)　$$k_L = \Phi / \Phi_g$$

を定めておくことが必要である．この値は空隙の幾何学的の寸法などで定まるので実験的に定めねばならぬ．しかし漏洩磁束は磁気回路に沿う起磁力分布傾度が変化しない限り生じないから，励磁線輪を空隙のところに設ければ漏洩磁束を少なくすることができる（第 5・57 図）．

空隙のところでは磁束が外方にふくらむように拡がるために磁束密度が減少する．これを fringing といい，その補正を行う必要がある．第 5・58図(a)の場合は，空隙の見掛の断面積を

(113)　$$S' = \pi\left(r + \frac{1}{2}g\right)^2$$

と仮定すれば，磁束密度は



第 5・57 図

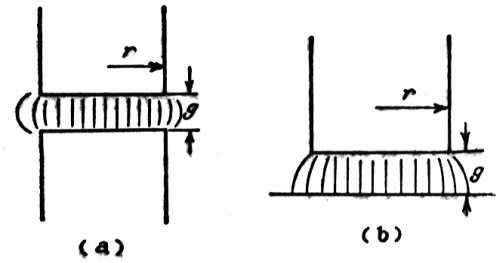
(7)　leakage coefficeint

(114)　$$B=\frac{\Phi}{S'}\qquad(\mathrm{T})$$

とり求められる．第 5・58図（b）の場合は見掛の断面積を

(115)　$$S'=\pi\left(r+g\right)^2$$

とすればよい．



第 5・58 図

f. 磁界空隙の引力　磁界に貯えられる磁気エネルギー密度は

(116)　$$w=\int_{B_0}^{B}H\,dB\qquad(\mathrm{J/m^3})$$

であるから，$V$ なる体積の空隙内に貯えられる磁気エネルギーは

(117)　$$W=\int_V w\,dv=\int_{V_0}dv\int^{B}H\,dB$$
$$=\frac{1}{2}\int_V H\cdot B\,dv=\frac{1}{2}\int\mu H^2\,dv\qquad(J).$$

空隙の対向面に作用する吸引応力を $P\,(\mathrm{N/m^2})$ とし，微小面積 $da$ に作用する吸引力のために空隙が $dg$ だけ縮まったとすると，この力によってなされる仕事は $P\,da\,dg$ (J) であり，この仕事によって

(118)　$$dv=dg\cdot da$$

なる体積内のエネルギーが失われることになる．このエネルギーの消滅と吸引力がなす仕事とは相等しいはずであるから

(119)　$$P\,dg\cdot da=\frac{1}{2}H\cdot B\,dv,$$

または

(120)　$$P=\frac{1}{2}H\cdot B=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\qquad(\mathrm{N/m^2})$$

である．これが空隙の単位面積に作用する吸引力の強さである．なお磁気回路の基礎的な説明は CULLWICK の著書[28]を参照するとよい．磁性に関する事項は STONER[29]の著書に詳しく述べられている．

g. 永久磁石の磁気回路　励磁線論を用いる代りに永久磁石を用いて磁気回路を構成する場合には，空隙の磁束密度は永久磁気の有する磁気エネルギーによって供給されるので，内部抵抗の高い電源を有する電気回路に似た性質を持つようになる．

(28)　E.G.CULLWICK “The Fundamentals of EIectromagnetism” Cambridge at the Univetsity Press 1939.

(29)　Edmund C.STONER:“Magnetism and Matter” Methuen & CO, 1934.

強磁性体の環に励磁線輪をまして，第 5･53 図の磁化曲線の $B_m$ に相当するところまで磁化してから励磁電流を零にすると残留磁束密度は $B_R$ となる．しかしこの残留磁束密度は電池の起電力のようなものであって，この値がそのまま実際の磁束密度として利用できるものではない．利用し得る磁束密度の大きさは保持力 $-H_c$ の値によって変ってくる．保持力は強磁性体内の原子磁極間に作用する力を表わす量であって，原子磁軸の方向の変化を阻止しようとする作用を有する．永久磁石に逆方向の磁界を加えたりあるいは機械的の衝撃を加えると磁化が減少するが，保持力の大きい永久磁石はこの傾向が小さい．

残留磁束密度 $B_R$ や保持力 $-H_c$ の値には材料によって定まる上限があり，永久磁石を磁化するときに，$H_m$ をいくら増加しても $B_R$ や $-H_c$ がもはや増加しなくなるような値が存在する．このような限界は通常は $H_m = (5/4\pi)\times 10^5 \approx 4\times 10^4$ A / m 位であり，これに対する $B_R$ と $-H_c$ の値を第 5･6 表に示しておく．なお $-H_c$ と $B_R$ との積は永久磁石として使用する磁性材料の良否を判定する量として用いられている．

第 5･6 表　$B_R$ と $H_c$ の最大値の例．

| 材　料 | $B_R$ (T) | $H_c$ (A / m) |
|---|---|---|
| 純　軟　鉄 | 1.04 | 35 |
| 1.2(%) 炭 素 鋼 | 0.8 | 4 610 |
| 6 (%) タングステン鋼 | 1.10 | 5 080 |
| 35 (%) コ バ ル ト鋼 | 0.95 | 20 000 |
| 25 (%) ニ ッ ケ ル | | |
| 13 (%) アルミニウム | 0.7 | 31 800 |
| 20 (%) ニ ッ ケ ル | | |
| 10 (%) アルミニウム | 0.75 | 47 800 |
| 10 (%) コ バ ル ト | | |

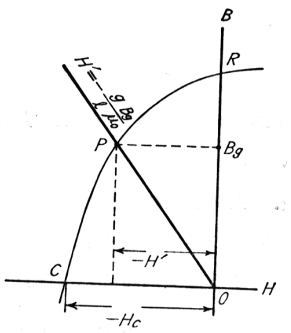
永久磁石の磁気回路に設けた空隙に生ずる磁束密度を $B_g$ とすると，励磁線輪のない場合の磁気回路内の起磁力分布傾度 $H'$ と空隙の起磁力分布傾度 $H_g$ との間には

(121)　$$\oint H\,ds = H'l + H_g\,g = 0,$$

なる関係が成立する．ただし漏洩磁束は無視している．よって

(122)　$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} \quad (\mathrm{A/m})$$

となり，$g$ なる空隙の存在のために磁石内には (123) だけの超磁力分布順度か生じ，これが減磁作用を行うことが示される．よって第




第5・59図　減磁曲線と動作点の関係．

5・59 図に示すように $B-H$ 図表上に（123）を描けば直線 $OP$ で表わされ．これと磁化曲線[30] $RPC$ との交点 $P$ が動作点となる．したがって $g$ なる空隙を有する場合には図の $B_g$ が空隙に生ずる磁束密度であり， $H'$ が磁気回路内に生じている減磁起磁力分布傾度である．

空隙の磁界に貯えられる磁気エネルギーは

(124)　$$W_g = \frac{1}{2} H_g B_g l S' \qquad (\mathrm{J})$$

であるが

(125)　$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = -H' \frac{l}{q}$$

であり，また漏洩を無視すると

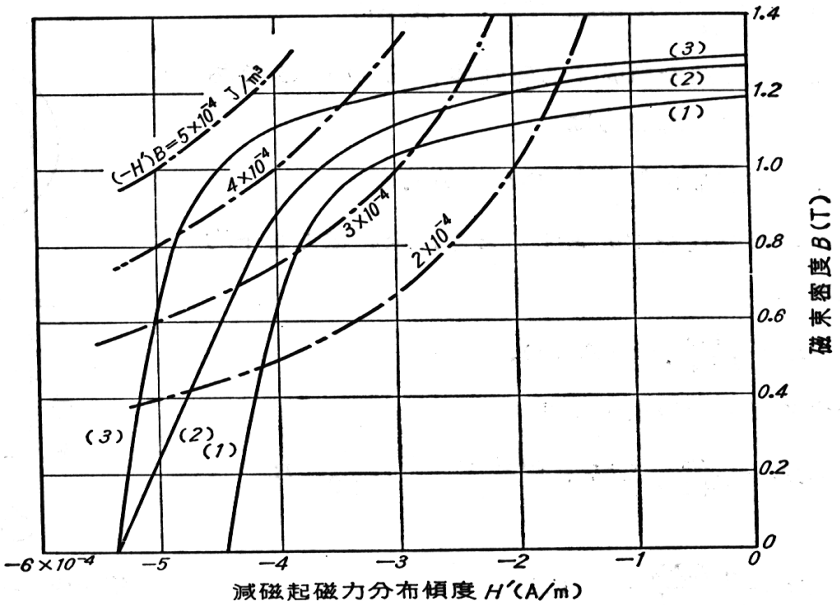
(126)　$$B_g S' = B S$$

と見なすことができるので

(127)　$$W_g = (-H') B (l S) = (-H') B V \qquad (\mathrm{J})$$

となる．ここに $V$ は永久磁石の体積であるから，空隙の磁気エネルギーを一定に保ちながら磁石の容積 $V$ をなるべく小さくするには $(-H')B$ をなるべく大きくすればよいことになる．このような判定の方法を“ EVERSHED の判定法 ”と呼んでいる．[31]

第 5・60 図には磁化曲線に空隙エネルギー密度 $-H'B_g$ (J/m$^3$) の目盛を施したものを示しておく．

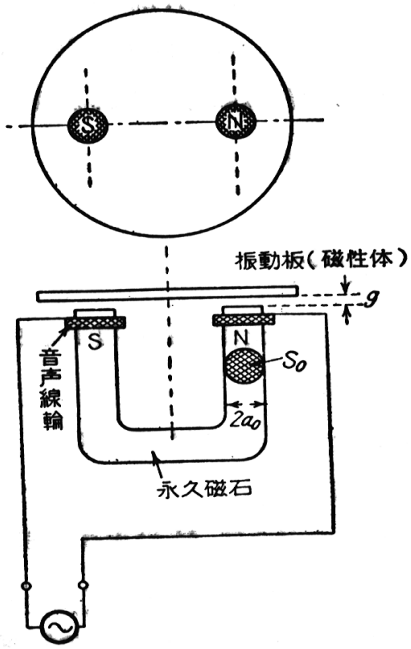



第 5・60 図　磁化曲線の例，3 種類の磁石の磁化曲線を示す．空隙磁界のエネルギーを最大とするには減磁曲線の肩の近隣に動作点を置く必要があることが示される．

(30)　demagnetization curve

(31)　S.EVERSHED: ”Permanent Magnet in Theory and Practice” JI.I.E.E.,Vol.LVII,p.780,1920; Vol.LXIII.p.725,1925.

h. 電磁型電気音響変成理論　電磁型電気音響変成器は第 5・61 図または第 5・62 図のように，永久磁石と磁性体振動板を空隙を介して設置し，永久磁石の空隙のある端に音声線輪を設けたものである．こうすると，音声線輪を流れる電流によって生ずる磁束は永久磁石の磁束と相加わるので，電流が交番電流であれば空隙を通る磁束密度は電流に応じて振動し，磁極面と振動板面との間の吸引力が変動する．その結果振動板はその平衡の位置の前後で振動し，音を発する．(32)



第5・61図　電磁型受話器の動作原理図.

この動作を解析するために，まず永久磁石の持っている起磁力を $N_0 I_0$ (A) なる励磁線輪の起磁力で置換して表わし，この起磁力によって磁気回路内に磁束密度 $B$ なる磁界が生じているものと考える．起磁力 $N_0 I_0$ によって真空中に生ずる磁束密度を $B_0$ とすれば，磁性体内の磁束密度が $B$ なる場合に磁気回路の内部磁界によって生ずる磁束密度は (86) より

(128)
$$B_i = \left(k_m - 1\right) B_0 \qquad (\mathrm{T})$$

であるから，この内部磁界を生ずるような起磁力分布傾度は

(129)
$$H_i = \frac{k_m - 1}{\mu} B_0 = k_m \frac{I_0 N_0}{l} \qquad (\mathrm{A/m})$$

となる．ただし $l$ は磁気回路を構成する磁性体部分の長さである．これより，磁気回路の全起磁力は

(130)
$$m_t = I_0 N_0 + \frac{k_m - 1}{\mu} B_0 l \qquad (\mathrm{A}).$$

磁気回路の有する空隙の全長を $2g$ とするとき，全起磁力を平均した起磁力分布傾度は

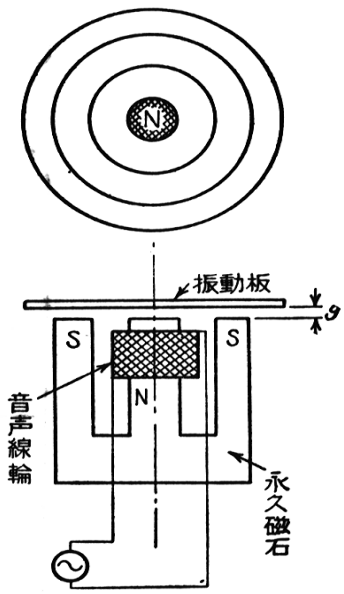
(131)
$$H_t = \frac{m_t}{l + 2g} \qquad (\mathrm{A/m}),$$

よって回路を貫通する磁束の磁束密度は

(132)
$$B = \mu_0 H_t = \frac{\mu_0}{l + 2g} I_0 N_0 + \frac{\mu_0 \left(k_m - 1\right)}{\mu} \frac{l}{l + 2g} B,$$

または

(133)
$$B = \frac{\mu_0 I_0 N_0}{2g - \dfrac{l}{k_m}} \qquad (\mathrm{T}).$$



第5・62図　電磁型受話器の動作原理図.

磁気回路の漏洩磁束を無視すると，音声線輪と錯交する磁束数は

(32)　平衡の位置は振動板のスティフネスと磁極の吸引力とから定まる一定の位置であり，音声電流が加わらないときにこの位置で静止しているように振動板を固定する．

(134)　$\Phi = BS_0$　(Wb),

ただし $S_0$ は磁気回路断面の面積であり，磁気回路が半径 $a_3$ なる円形であれば

(135)　$S_0 = \pi a_0{}^2$　($m^2$),

また空隙の磁束密度は（114）より

(136)　$B' = \dfrac{\Phi}{S'}$　(T)

となる．これらの結果を用いれば，永久磁石の起磁力の代りに $N_0 I_0$ なる電流線輪を用いて計算を進めることができる．

音声線輪の巻数を $N$ 回とするとき $N_0$ 回巻いた励磁線輪内に $I_0$ (A) の電流が流れていれば，これを音声線論側に置換すると

(137)　$I_0{}' = \dfrac{N_0}{N} I_0$　(A)

となる．今音声線輪には

(138)　$I e^{-i\omega t}$　(A)

なる交番電流が流れているものとすると，励磁電流を考える代りに，音声線輪に

(139)　$I_t = I_0{}' + I e^{-i\omega t}$

なる電流が流れていると考えても差支えない．こうすることによって氷久磁右の起磁力は考えの外に置くことができる．音声線輪に $I_t$ なる電流が流れたときに，この磁気回路に生ずる磁束密度は

(140)　$B = \dfrac{\mu_0 N I_t}{2g - \dfrac{l}{k_m}}$　(T),

貫通する磁束は

(141)　$\Phi = \dfrac{\mu_0 S_0}{2g - \dfrac{l}{k_m}} N I_t$　(Wb)

であり，空隙の磁束密度は

(142)　$B' = \dfrac{\Phi}{S'} = \dfrac{S_0}{S'} B$　(T)

となる．

この回路の磁気抵抗は

(143)　$\Re_0 = \dfrac{2g - \dfrac{l}{k_m}}{\mu_0 S_0}$　(WB/A)

であるが，音声線輪の電流が変動すると．空隙の吸引が変化し空隙の長さが変化する．この変化を $\delta g$ とすると磁気抵抗の変化は

(144) $$\Re = \frac{2(g-\delta g)-\dfrac{l}{k_m}}{\mu_0 S_0} = \Re_0 - \delta\Re ,$$

(145) $$\delta\Re = \frac{2\delta g}{\mu_0 S_0}$$

と表わされる．そのため磁束は

(146) $$\Phi = \frac{N I_t}{\Re_0 - \delta\Re}$$

に変化することになる．この値は

(147) $$\delta\Re \ll \Re_0 , \quad I \ll I_0$$

のときには

(148) $$\Phi \approx \frac{N}{\Re_0}\left(1+\frac{\delta\Re}{\Re_0}\right)\left(I_0{}' + I e^{-i\omega t}\right)$$
$$\approx \frac{N}{\Re_0}\left(I_0{}' + I e^{-i\omega t} + \frac{\delta\Re}{\Re_0} I_0{}'\right)$$

となり，空隙に作用する吸引力は（120）より

(149) $$P = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2\mu}\frac{\Phi^2}{S'^2}$$
$$= \frac{1}{2\mu S'^2}\frac{N^2}{\Re_0{}^2}\left(I_0{}' + I e^{-i\omega t} + \frac{\delta\Re}{\Re_0} I_0{}'\right)^2$$
$$= \frac{N^2}{2\mu S'^2 \Re_0{}^2}\left(I_0{}'^2 + 2 I_0{}' I e^{-i\omega t} + \frac{\delta\Re}{\Re_0} I_0{}'^2 + I^2 e^{-i2\omega t}\right.$$
$$\left. + 2\frac{\delta\Re}{\Re_0} I' I e^{-i\omega t} + \left(\frac{\delta\Re}{\Re_0}\right)^2 I_0{}'^2\right)$$
$$\approx \frac{N^2}{2\mu S'^2 \Re_0{}^2}\left\{\left(1+2\frac{\delta\Re}{\Re_0}\right) I_0{}'^2 + 2 I_0{}' I e^{-i\omega t} + I^2 e^{-i2\omega t}\right\} \qquad (\mathrm{N/m^2}) ,$$

空隙の全面積に作用する吸引力は

(150) $$F = 2 S_0 P$$
$$= \frac{S_0 N^2 I_0{}'}{\mu \Re_0{}^2 S'^2}\left\{\left(1+2\frac{\delta\Re}{\Re_0}\right) I_0{}' + 2 I e^{-i\omega t} + \frac{I^2}{I_0{}'} e^{-i2\omega t}\right\} \quad (\mathrm{N}) .$$

振動板の変位を $\xi$ とし，$\delta g$ の代りに $\xi$ を用いて

(151) $$\delta\Re = \frac{2\xi}{\mu_0 S_0}$$

とおくと，吸引力は二次の微小量を省いて

(152) $$F = \frac{2 S_0 N^2 I_0{}'}{\mu \Re_0{}^2 S'^2}\left(\frac{I_0{}'}{2} + I e^{-i\omega t} + \frac{2 I_0{}'}{\mu_0 S_0 R_0}\xi\right)$$

とかけるから

(153) $$p = \frac{2 S_0 N^2 I_0{}'}{\mu S'^2 \Re_0{}^2} , \qquad q = \frac{2 I_0{}'}{\mu_0 S_0 \Re_0}$$

とおけば，振動板に作用する力は

(154)
$$F = \frac{p}{2} I_0 + p I e^{-i\omega t} + pq\xi \qquad \text{(N)}$$

となる．一方振動板の変位 $\xi$ により音声線輪に生ずる逆起電力は

(155)
$$E_c = -N\frac{d\Phi}{dt}$$
$$= -\frac{N^2}{\mathfrak{R}_0}\left[\frac{d}{dt}\left(I e^{-i\omega t}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0} I_0{}'\right)\right]$$
$$= -\frac{N^2}{\mathfrak{R}_0}\left[\frac{d}{dt}\left(I e^{-i\omega t}\right) + \frac{2 I_0{}'}{\mu_0 S_0 \mathfrak{R}_0}\frac{d\xi}{dt}\right] \qquad \text{(V)}$$

である．(154) と (155) とを用いて電気音響変成式を誘導することができる．

第 5·62 図のように電磁型電気音響変成系の電気端子 $EE'$ で測った電圧と電流の実効値を $\dot{E}, \dot{I}$ とし，機械端子 $MM'$ で測った振動板面上の力と速度の実効値を $\dot{F}, \dot{\Xi}$ とすれば，外部起電力 $\dot{E}_0$ および外部起振力 $\dot{F}_0$ のない場合には

(156)
$$\dot{I} Z_d{}^E = \dot{E}_c + \dot{E} \qquad \text{(V)},$$
$$\dot{F} = \left(Z_d{}^M + Z_1{}^M + Z_2{}^M\right)\dot{\Xi} = Z^M \dot{\Xi} \qquad \text{(N)},$$

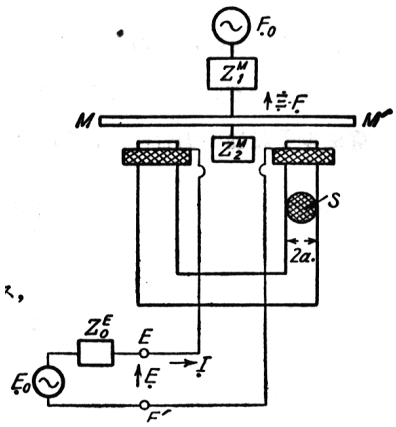
ただし

$Z_d{}^E$ は音声線輪の電気インピーダンス．

$Z_d{}^M$ は振動板自身の機械インピーダンス，

$Z_1{}^M$ は振動板前面の空間が振動板に及ぼす機械インピーダンス，

$Z_2{}^M$ は振動板後面の空間が振動板に及ぼす機械インピーダンス．



第 5・63 図　電磁型電気音響変換系．

ここで (154) と (155) および

(157)
$$\dot{\Xi} = \frac{-i\omega}{\sqrt{2}}\xi$$

を用いると

(158)
$$\dot{E} = \left(Z_d{}^E - i\omega\frac{N^2}{\mathfrak{R}_0}\right)\dot{I} + \frac{2 I_0{}' N^2}{\mu_0 S \mathfrak{R}_0{}^2}\dot{\Xi} \qquad \text{(V)},$$
$$\frac{p}{2} I_0{}' = -p\dot{I} + \left(Z^M - i\frac{pq}{\omega}\right)\dot{\Xi} \qquad \text{(N)},$$

ここに

$$Z^M = Z_d{}^M + Z_1{}^M + Z_2{}^M \qquad \text{(N·s/m)},$$

よって，$\dot{E}_0$ と $\dot{F}_0$ が存在する場合の一般式は

(159)
$$\dot{E}_0 = \left(Z_0{}^E + Z_d{}^E - i\omega\frac{N^2}{\mathfrak{R}_0}\right)\dot{I} + \frac{S'}{S_0{}^2} p\dot{\Xi} \qquad \text{(V)},$$

$$F_c + \frac{p}{2} I_0{}' = pI + \left( Z_d{}^M + Z_1{}^M + Z_2{}^M - i\frac{pq}{\omega} \right) \dot{\Xi} \qquad (\mathrm{N}),$$

ただし

$$p = \frac{2 S_0 N^2}{\mu_0 S' \Re_0{}^2} I_0{}' , \quad q = \frac{1}{\Re_0} \frac{2I'}{\mu_0 S_0} ,$$

$$\Re_0 = \frac{2g - \dfrac{l}{k_m}}{\mu_0 S_0} , \quad S' = \pi \left( a_0 + g \right)^2 ,$$

$2g$　･･･磁気回路の持つ空隙の全長,

$l$　･･･磁気回路を構成する磁性体の平均長,

$S_0$　･･･磁極のところの磁気回路の断面積・

$S'$　･･･磁束の fringing を考えた面積.

$N$　･･･音声線輪の巻回数

で与えられる．(52) 中の $\frac{p}{2} I_0{}'$ で表わされる不変力は永久磁石による引力である．実際に振動板を設ける場合にはこの力に平衡するような一定の力を逆向きに加えておくので，電気音響変成にはこの不変力を省いて考えて差支えない．

電磁型受話器の場合には，$F_0 = 0$ とおくと

(160)
$$\left( Z^M - i\frac{pq}{\omega} \right) \Xi = pI \qquad (\mathrm{N}),$$

または

(161)
$$\dot{\Xi} = \frac{pI}{Z^M - i\dfrac{pq}{\omega}} \qquad (\mathrm{m/s})$$

となるから

(162)
$$\dot{E}_0 - Z_0{}^E \dot{I} = \left( Z_0{}^E - i\omega \frac{N^2}{\Re_0} + \frac{S'}{S_0{}^2} \frac{p^2}{Z^M - i\dfrac{pq}{\omega}} \right) \dot{I} \qquad (\mathrm{V})$$

となる．これより受話器の自由インピーダンスは

(163)
$$Z_f{}^E = Z_0{}^E - \frac{N^2}{\Re_0} + \frac{S'}{S_0{}^2} \frac{p^2}{Z^M - i\dfrac{pq}{\omega}} \qquad (\Omega),$$

固定インピーダンスは $\dot{\Xi} = 0$ の場合の $EE'$から見たインピーダンスであるから

(164)
$$Z_d{}^E = Z_0{}^E - i\omega \frac{N^2}{\Re_0} \qquad (\Omega),$$

よって動インピーダンスは

(165)
$$Z_m{}^E = Z_f{}^E - Z_d{}^E = \frac{S'}{S_0{}^2} \cdot \frac{p^2}{Z^M - i\dfrac{pq}{\omega}} \qquad (\Omega)$$

となる．ここで

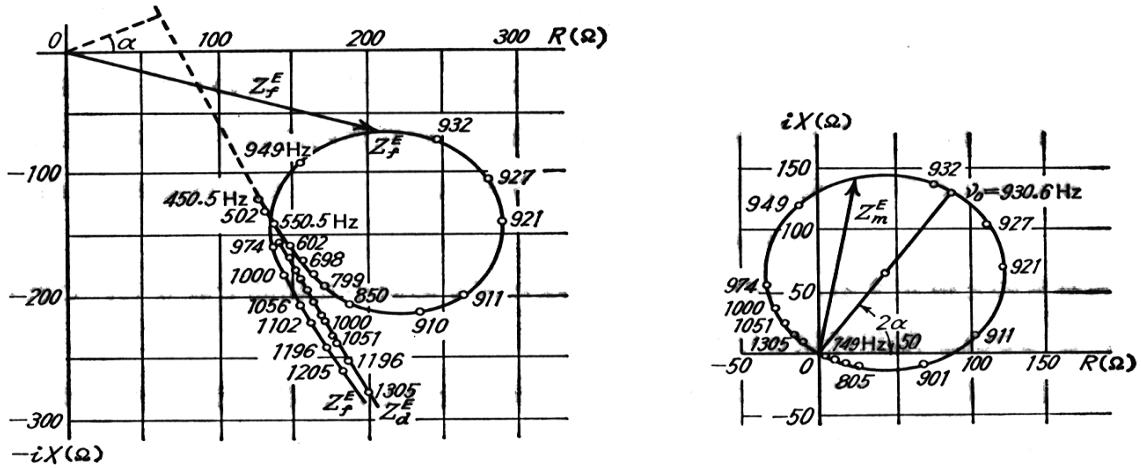
(166)　$$Z_v{}^M = -i\frac{pq}{\omega} = +\frac{pq}{\omega},$$

(167)　$$Z_m{}^M = Z_d{}^M + Z_v{}^M + Z_1{}^M + Z_2{}^M = Z^M + Z_v{}^M$$

とおくと

(168)　$$Z_m{}^E = \frac{\frac{S'}{S_0{}^2}p^2}{Z_m{}^M} \quad (\Omega)$$

と表わされる．ここに $Z_m{}^M$ は機械的動インピーダンスである．




(a) 自由インピーダンス $Z_f^E$ と固定インピーダンス $Z_d^E$　　(b) 動インピーダンス $Z_m^E = Z_f^E - Z_d^E$

第5・64図　　電磁型受話器の電気インピーダンス．

実際に受話器のインピーダンスを測定した結果は第5・64図のようなものである．ここで注意すべきことは固定インピーダンス $Z_d{}^E$ が $X$ 軸と $\alpha$ だけ傾いていること，および動インピーダンス $Z_m{}^E$ の円の直径が実軸と $2\alpha$ だけ傾いている点である．この現象は磁気リアクタンスが

(169)　$$\mathfrak{R}_0 = \left|\mathfrak{R}_0\right| e^{ia}$$

なる複素角を持っていると考えることにより説明され，このときには

(170)　$$p^2 = \left|p^2\right| e^{-i2a},$$

(171)　$$\frac{N^2}{\mathfrak{R}_0} = \frac{N^2}{\left|\mathfrak{R}_0\right|} e^{-ia}$$

となるので，$Z_m{}^E$ 円の直径 $\frac{S'}{S_0{}^2}p^2 / R_m{}^M$ は $2\alpha$ だけ傾き，また (164) の $Z_d{}^E$ は $\omega$ の増加にしたがって $X$ 軸と $\alpha$ の傾きを保って移動する．ここに $R_m{}^E$ は $Z_m{}^E$ の実数部である．

電磁型電気音響変成理論は初め POINCARE によって基礎を置かれ，次いで KENNELLY および PIERCE[33] により実験的に $Z_m{}^E$ 円が求められ，抜山[34] が $Z_v{}^E$ の頂を加えた．ここでは fringing の補正を加えた形で示してある．

(33)　A.E.KENNELLY and G.W.Pierce：前掲

(34)　A.E.KENNELLY and H.NUKIYAMA：“The Electromagnetic Theory of the Telephone Receiver With Special Reference to Motional Impedance” A.I.E.E., Vol.14, p.481-539, 1919.

5・5・4 磁歪型電気音響変成系

強磁性体に外部から磁界を加えると，磁界の方向に伸びを生ずることが観測され，また逆に外力によって伸びを生じさせるとその伸びの方向に起磁力の発生することが観測され，この現象か電気音響変成器に利用されて水中の超音波送受信に重要な地位を占めるようになった．このように磁界とヒズミとの間にエネルギー変換の行われる現象を磁歪現象[1]と呼ぶ．その変換機構を物性論的に~~発明~~することは物理学の分野の当面の問題である．ここでは現象的に見た結果のみを用いて磁歪型電気音響変成理論を簡単に紹介する．

a. 磁歪効果　強磁性体を磁化すると機械的のヒズミを生ずる．このヒズミは磁化する方向への伸びとして観測される．このような伸びが生ずることは，磁性体内に磁界方向の応力が発生しているためであると考えられるので，応力(圧力)の1軸方向の成分 $p_1$ と磁束密度成分 $B_1$ との間に

(172) $$p_1 = \sigma B_1 \quad \text{(Pa)}$$

なる関係があるものと仮定する．このような関係はヒズミの微小な範囲で成立し，これを JOULE 効果といい，$\sigma$ を JOULE効果係数と呼ぶ．

強磁性体の長さが $l$(m) で断面積が $S$(m$^2$) なる棒状をなし，長さの方向の伸びか $\xi_1$(m) であるとすれば伸びヒズミの大きさは

(173) $$\varepsilon_1 = \frac{\xi_1}{l} \quad \text{(数値)}$$

であり，ヒズミと応力との関係は YOUNG 率 $E$ を用いて

(174) $$p_1 = \varepsilon_1 E \quad \text{(Pa)}$$

と表わされるから，(172) は

$$E\varepsilon_1 = \sigma B_1 \quad \text{(Pa)}$$

とも表わされる．

JOULE 効果の逆の現象を VILLARI 効果と呼ぶ．すなわち，強磁性体に機械的のヒズミ $\varepsilon_1$ を与えたときに，磁性体内に生ずる起磁力分布傾度は

(176) $$H_1 = \gamma\varepsilon_1 \quad \text{(A/m)}$$

と表わされる．ここに $\gamma$ は VILLARI 効果係数と呼ばれる．しかるに $\mu$ を磁性体の導磁率とすれば

(177) $$B_1 = \mu H_1$$

の関係があるから，(176) は

(178) $$\frac{B_1}{\mu} = \gamma\varepsilon_1 \quad \text{(T)}$$

と書け，(175) と (178) によって，$B_1$ と $\varepsilon_1$ との関係か規定される．

b. 磁気回路の磁歪現象　一つの磁気回路について磁歪現象を考えれば，回路の方向と磁界の方

(1) magneto-striction

向および伸びの方向が一致しているので，表現が簡単になる．

いま回路の長さの方向に $\varepsilon$ なるヒズミを与えたとすると，このヒズミによって生ずる磁束密度は

(179)　$$B = \mu\gamma\varepsilon \qquad (\mathrm{T})$$

であり，この磁束密度によって生ずる応力は

(180)　$$p = \sigma\mu\gamma\varepsilon \qquad (\mathrm{N/m^2})$$

であるから，回路に貯えられる弾性エネルギー密度は

(181)　$$w^M = \frac{1}{2}p\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\mu\gamma\varepsilon^2 \qquad (\mathrm{J/m^3}),$$

回路に貯えられる磁気エネルギー密度は

(182)　$$w^m = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu\gamma^2\varepsilon^2 \qquad (\mathrm{J/m^3})$$

となる．エネルギーの保存則によれば（182）のエネルギーは（181）が変換したものと考えなければならない．よって

(183)　$$w^M = w^m$$

とおくと

(184)　$$\sigma = \gamma$$

でなければならぬ．一方 $\sigma$ と $\gamma$ の次元を調べてみると，

(185)　$$[\sigma] = \frac{p}{B}\left[\frac{\text{newton}}{\text{weber}}\right] = \left[\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L}}\right],$$

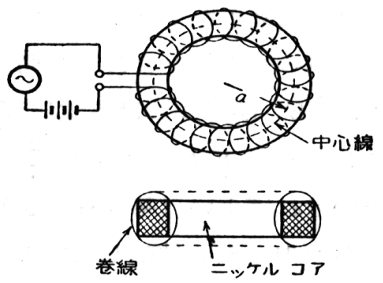
$$[\gamma] = \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{L}}\right]$$

となり，両者の次元も一致している．よって磁気回路の磁歪現象は$\sigma$ か $\gamma$ かの一方のみを用いて表現することができ，たとえば

(186)　$$p = \sigma B \qquad (\mathrm{Pa}),$$
$$H = \sigma\varepsilon \qquad (\mathrm{A/m})$$

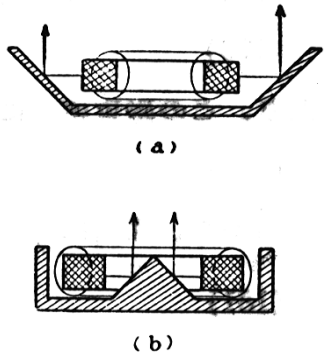
と表わされる．ここに $\sigma$ を磁歪係数と呼ぶ．

c. 環状磁歪振動子　磁気回路を用いて磁歪振動を発生させる一つの形は第5･65図に示すような環状のニッケルにトロイダル線輪を巻いたものである．この場合磁歪現象は環の中心線の方向に生ずるが，中心線が伸縮すると環の半径が増減し，結局環の側面の位置が変動する．したがって音響輻射は環の側面から行われる．実際の振動子は環の内面か外面がいずれか一方を輻射面に使用するので，この面上に線輪が露出しないようにニッケル材に孔を作り，かつ輻射音が一方向に集中するように反射笠を備えている(第5・66図)．



第 5･65 図　環状磁歪振動子の原理．

環の寸法は，その最低固有縦振動数が励振周波数と一致するように選ばねばならぬので，単一周波数でしか使用できないが，共振周波数を数十キロサイクルにすることができるから水中の超音波の送受信器としては非常に有効である．環の縦振動の振動数は2·4で示した通り，



第 5·66 図　環状磁歪振動子．

(187)
$$\nu_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2\pi a}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2\pi a}c \qquad (\mathrm{Hz})$$

であり，ニッケルについての諸定数は

(188)
$$E = 2.02\times10^{12}\ \ \mathrm{dynes/cm^2} = 2.02\times10^{11}\ \ \mathrm{N/m^2}$$
$$\rho = 8.75\ \ \mathrm{gr/cm^3} = 8.75\times10^{3}\ \ \mathrm{kg/m^3},$$
$$c = 4.8\times10^{3}\ \ \mathrm{m/s}$$

である．第一共振周波数の附近のみを問題とするときは

(189)
$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (\mathrm{rad/s})$$

の近傍のみに限定して考えて良く，この範囲では振動子を単純化して考えることができる．すなわち第一共振の環の振動は，環全体が一様に振動するので，環の側面(内面または外面のいずれか一方)上の振動速度の法線成分は至る所相等しく，また側面上に作用する力の大きさと振動速度とに関するインピーダンスは

(190)
$$Z^M = R^M - i\left(\omega M - \frac{K}{\omega}\right) \qquad (\mathrm{N\cdot s/m})$$

の形で表わせる．ここに $M$ は環の全質量であり

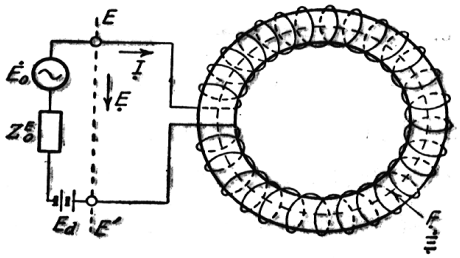
(191)
$$M = \rho l S = 2\pi a\rho S \qquad (\mathrm{kg}),$$
$$S \ \text{は環の断面積} \qquad (\mathrm{m^2})$$

であり，第一共振周波数附近における環の等価スティフネスは

(192)
$$K = \omega_0{}^2 M = 2\pi a\rho S\frac{E}{a^2\rho} = \frac{4\pi S\rho c^2}{l} \qquad (\mathrm{N/m}).$$

これらの定数が定まると磁歪変成を解析することが可能となる．

環状磁歪振動子を電気音響変成器として解析するには，その電気端子をトロイダル線輪の端子 $EE'$ とし，音響端子を環の中心線を含む平均側面とし，これを $MM'$ と考えて，$EE'$ 端子における電圧 $\dot{E}$ および電流 $\dot{I}$ と $MM'$ 面における力 $\dot{F}$ および速度 $\dot{\Xi}$ との間のエネルギー変換を関係づければよい（第 5·67 図）．



第 5・67 図　磁歪型電気音響変換系．

環の中心線が伸縮しないと考えた場合に電気端子から見た線輪の固定インピーダンスは線輪の実効抵抗 $R_d{}^E$ と自己インピーダンス $L_d{}^E$ で構成されていると考えられ

(193)　$$Z_d{}^E = R_d{}^E - i\omega L_d{}^E \qquad (\Omega),$$

ただし

(194)　$$L_d{}^E = \frac{\mu S N^2}{l} = \frac{4\pi k_m S N^2}{l} \times 10^{-7} \qquad (\mathrm{H}),$$

$N$ は線輪の総巻回数，　$R_d{}^E$ は使用周波数に対して磁性体中の諸損失をも考えた実効抵抗であり，この線輪に　$I$　なる電流が流れるときに生ずる起磁力分布傾度は

(195)　$$H = \frac{N I}{l} \qquad (\mathrm{A/m}).$$

環の中心線が伸縮する場合には，伸縮することによって生ずる起磁力が反作用の形で（195）に加わることになる．環の中心線の伸びを　$\xi_1$　とすると，伸びヒズミは

(196)　$$\varepsilon_l = \frac{\xi_1}{l},$$

ただし

$$l = 2\pi a.$$

一方中心線が　$\xi_l$　だけ伸びると環の半径は　$a$　よりも増さねばならぬ．その結果中心線の位置は半径方向に　$\xi_r$　だけ変位する筈である．この　$\xi_r$　の大きさは

(197)　$$2\pi\left(a + \xi_r\right) = l + \xi_l \qquad (\mathrm{m})$$

を満足すべき値でなければならず，これより

(198)　$$\xi_r = \frac{\xi_l}{2\pi} = \frac{l}{2\pi}\varepsilon_l = a\varepsilon_l \qquad (\mathrm{m}).$$

よって，中心線を含む音響断面の径方向の振動速度は

(199)　$$\xi_r = a\frac{d\varepsilon_l}{dt} \qquad (\mathrm{m/s}),$$

または実効値で示せば

(200)　$$\dot{\Xi}_r = -i\omega a\,\dot{\varepsilon}_l.$$

環の伸縮によって軸方向に生ずる起磁力分布傾度は（186）より

(201)　$$H_l = \sigma\varepsilon_l = \frac{\sigma}{\mu}\xi_r \qquad (\mathrm{A/m}),$$

または実効値で

(202)　$$\dot{H}_l = -\frac{\sigma}{i\omega a}\dot{\Xi}_r = \frac{2\pi\sigma}{i\omega l}\dot{\Xi}_r.$$

よって振動状態における磁歪振動子の合成の起磁力分布傾度は，（195）と（202）とから

(203)　$$\dot{H}_t = \frac{1}{l}\left(N\dot{I} - \frac{2\pi\sigma}{i\omega l}\dot{\Xi}_r\right) \qquad (\mathrm{A/m}),$$

磁束密度および全磁束は

(204)　$$\dot{B} = \mu\dot{H}_t \qquad (\mathrm{T}),$$

(205)　$$\dot{\Phi} = \mu \dot{H}_t S \qquad (\mathrm{Wb}),$$

(205) なる交番磁束によって線輪内に生ずる逆起電力は

(206)　$$\dot{E}_c = -\frac{d}{dt}\left(N\dot{\Phi}\right) = i\omega N\dot{\Phi}$$

$$= i\omega L_d{}^E \dot{I} - \frac{2\pi\sigma\mu S N}{l}\dot{\Xi}_r \qquad (V).$$

電気端子に $\dot{E}$ (V) の電圧を加え，$E_c$ に逆らって $\dot{I}$ (A) の電流を流すためには，線輪の抵抗による電圧降下 $R_d{}^E I$ と $-E_c$ との和に等しい端子電圧を加える必要がある．よって

(207)　$$\dot{E} = R_d{}^E \dot{I} - \dot{E}_c$$

$$= Z_d{}^E I + A\dot{\Xi}_r,$$

ここに

(208)　$$A = \frac{2\pi\mu\sigma N S}{l}$$

は力係数[1]に相当する

次に機械端子における力の平衡を考える．環の磁場の変動による磁歪効果によって生ずる応力は

(209)　$$\dot{P}_l = \sigma \dot{B} = \frac{\mu\sigma}{l}\left[N\dot{I} - \frac{2\pi\sigma}{i\omega}\dot{\Xi}_r\right] \qquad (\mathrm{Pa}),$$

この応力による伸びは $\dot{\Xi}_l$ であるから，伸びによる仕事は

(210)　$$\overline{W}_l = \dot{P}_l \cdot \dot{\Xi}_l \cdot S \qquad (\mathrm{W}).$$

これだけの仕事が側面方向の起振力 $F_r$ に変換したとすると

(211)　$$\dot{F}_r \cdot \dot{\Xi}_r = \overline{W}_l = \dot{P}_l \cdot \dot{\Xi}_l \cdot S = 2\pi\dot{\Xi}_r \cdot \dot{P}_l \cdot S \qquad (\mathrm{W})$$

でなければならぬ．よって

(212)　$$\dot{F}_r = 2\pi S \dot{P}_l = \frac{2\pi\mu\sigma S}{l}\left[N\dot{I} - \frac{2\pi\sigma}{i\omega}\dot{\Xi}_r\right]$$

$$= A\dot{I} - Z_n{}^M \dot{\Xi}_r \qquad (N),$$

ただし

(213)　$$Z_n{}^M = \frac{4\pi^2\sigma^2\mu S}{i\omega l} \qquad (\mathrm{N{\cdot}s/m})$$

となる．

環の側面の運動は，煤質が側面に及ぼす力 $F$ と上記の起振力 $F_r$ との和によって定められると考えられるので，側面の振動速度は

(214)　$$\dot{F} + \dot{F}_r = Z^M \dot{\Xi}_r$$

で規定されなければならぬ．よって機械端子に現われる力は

(1)　folce factor

(215)
$$\dot{F} = -F_r + Z^M \dot{\Xi}_r$$
$$= -A\dot{I} + \left(Z^M + Z_n{}^M\right)\dot{\Xi}_r \qquad (\mathrm{N}),$$

または

(216)
$$Z_d{}^M = Z^M + Z_n{}^M$$

とおけば

(217)
$$\dot{F} = -A\dot{I} + Z_d{}^M \dot{\Xi}_r$$

となる．よって環状磁歪振動子の基本式は

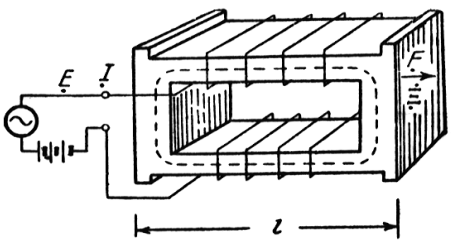
(218)
$$\dot{E} = Z_d{}^E \dot{I} + A\dot{\Xi}_r \qquad (\mathrm{V}),$$
$$\dot{F} = -A\dot{I} + Z_d{}^M \dot{\Xi}_r \qquad (\mathrm{N})$$

ただし

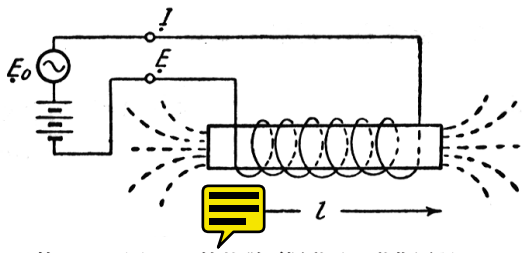
$$Z_d{}^M = Z^M + Z_n{}^M,$$
$$Z^M = R^M - i\left(\omega M - \frac{K}{\omega}\right),$$
$$Z_n{}^M = \frac{4\pi^2\sigma^2\mu S}{i\omega l},$$
$$M = \rho l S, \qquad K = \frac{4\pi S\rho c^2}{l},$$
$$Z_d{}^E = R_d{}^E - i\omega L_d{}^E,$$
$$L_d{}^E = \frac{4\pi k_m S N^2}{l} \times 10^{-7},$$
$$A = \frac{2\pi\mu\sigma N S}{l}.$$

d. 棒状磁歪振動子

実用に供されている磁歪振動子のもう一つの形は，第5･68図に示すようなものである．これを第5･69図のような単純な形のものにすると，磁気回路が閉じないので磁界を強くすることができない．




第 5・68図　棒状磁歪振動子．



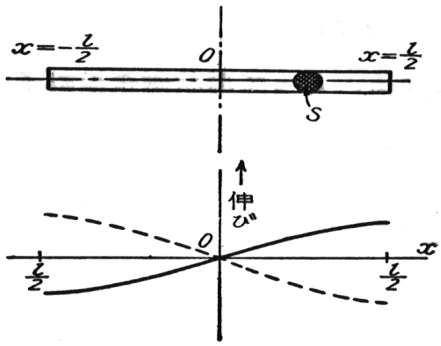

第 5・69図　棒状磁歪振動子の動作原理．

第 5・68 図は単純な棒が2本並列に接続されていると考えられる．この振動子は，$l$ なる長さの棒の縦振動の第一共振姿態を使用するので，この周波数の附近の性質は，環状振動子の場合と同様の方法で解析することができる．

棒の長さの方向の座標を $x$ とすると，棒が縦振動をする場合に $x$ なる位置の断面の変位は

(219)
$$\xi = \left( A e^{+ikx} + B e^{-ikx} \right) e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m}),$$
$$k = \alpha + i\beta, \qquad \alpha \ll \beta,$$
$$\alpha = \frac{\omega}{c}, \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

で与えられる．ここに $E$ はYOUNG率，$\rho$ は棒の密度，$\beta$ は僅かの損失による減衰を示す減衰定数である．両端自由棒の第－共振姿態は第 5·70 図のような形であるから，(219) の境界条件の一つは



第5・70図

(220)
$$x = 0 \qquad \text{にて} \quad \xi = 0$$

である． $x = \pm\frac{l}{2}$ の端面においては，棒が自由振動をする場合には2·3·2で述べた境界条件が適用されるが，磁歪振動子の場合には各断面に起振力が生ずるので，端面に加わる起振力がわからぬと境界条件が定まらない．今単純に考えて，棒の起振力は断面上に一様に分布しているものと仮定し，端面に生ずる伸び応力を $X_x$ とおくと，端面のヒズミは

(221)
$$\varepsilon = \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]_{x=\frac{1}{2}} = \frac{X_x}{E}$$

で表わされる．よって (220) と (221) を用いると (219) より

(222)
$$A = -B = \frac{X_x}{i\,2kE\cos\frac{kl}{2}},$$

(223)
$$\xi = \frac{X_x}{kE}\,\frac{\sin kx}{\cos\frac{kl}{2}}\cdot e^{-i\omega t}$$

を得るから，端面の速度は

(224)
$$\left.\dot{\xi}\right]_{x=\frac{l}{2}} = -i\omega\frac{X_x}{kE}\tan\frac{kl}{2}\cdot e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．これをさらに変形すると

(225)
$$\left.\dot{\xi}\right]_{x=\frac{l}{2}} = \frac{X_x}{\dfrac{kES}{-i\omega}\cot\left(\dfrac{\alpha l + i\beta l}{2}\right)}$$

となるが，

(226)
$$\frac{kES}{-i\omega} = iES\frac{\alpha}{\omega}\left(1 + i\frac{\beta}{\alpha}\right) \approx i\frac{ES}{c} = i\rho c S$$

であるから，端面から見た棒の機械インピーダンスを

(227)
$$Z^M = i\rho_0 c S\cot\left(\frac{\alpha l + i\beta l}{2}\right)$$

とおけば，(225) は

(228)　$$\dot{\xi}\Big]_{x=\frac{l}{2}} = \frac{X_x S}{Z^M} \qquad (\mathrm{m/s})$$

と表わされる．

棒の断面 $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ に　$Z_0$なる音響負荷が接続され，かつ端面に　$F$ なる外力が作用している場合には，境界条件が

(229)　$$x=0 \quad にて \quad \xi=0\,.$$
$$x=\frac{l}{2} \quad にて \quad S\,E\frac{\partial \xi}{\partial x} = S\,X_x - F$$

と表わされる．よって端面における速度と力との関係は

(230)　$$S\,X_x = Z^M \dot{\xi}\Big]_{x=\frac{l}{2}} + F\,.$$

しかるに

(231)　$$Z_0{}^M \dot{\xi}\Big]_{x+\frac{l}{2}} = F$$

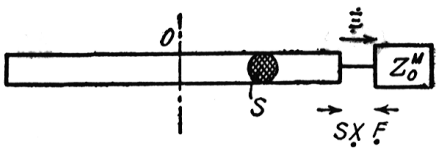
なる関係があるから端面の速度は，実効値で表わすと

(232)　$$\dot{\xi} = \frac{S\,X_x}{Z^M + Z_0{}^M} \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．ここに　$Z_0{}^M$ は煤質が端面に及ぼす反作用の大きさを代表する項であり，$Z^M$　は棒自身の機械インピーダンスである．

棒の端面から見た機械インピーダンス　$Z^M$　の形は（227）で定義したのであるが，　この函数は第一共振周波数の近傍では

(233)　$$Z^M = R_0{}^M - i\left(\omega M_0 - \frac{K_0}{\omega}\right)$$



第 5・71 図

なる形に書き表わされる筈である．ここに　$R_0{}^M$　は実効機械抵抗，　$M_0$ は実効質量，　$K_0$ は実効スティフネスであって，共振角周波数は

(224)　$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{M_0}} \qquad (\mathrm{rad/s})$$

である．一方，棒の第一共振角周波数は，棒の全長が半波長　$\frac{\lambda_0}{2}$　となるような角周波数であるから

(225)　$$l = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\pi}{\alpha_0} = \frac{\pi c}{\omega_0} \qquad (\mathrm{m})\,,$$

または

(226)　$$\omega_0 = \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (\mathrm{rad/s})$$

で与えられる．（233）の中の　$\omega$　が　$\omega_0$の近傍のみに限定されている場合には

(237)　$$\omega = \omega_0(1+\delta)\,, \qquad \delta \ll 1$$

とおくと（227）の cotangent の因数は

(238)
$$\cot\left(\frac{l\omega}{2c}+i\frac{\beta l}{2}\right)=\cot\left(\frac{\omega_0 l}{2c}+\frac{\omega_0 l\delta}{2c}+i\frac{\beta l}{2}\right)$$
$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega_0 l\delta}{2c}+i\frac{\beta l}{2}\right)$$
$$=-\tan\left(\frac{\omega_0 l\delta}{2c}+i\frac{\beta l}{2}\right)\approx-\left(\frac{\omega_0 l\delta}{2c}+i\frac{\beta l}{2}\right)$$

と表わされる．一方（237）より

(239)
$$\omega_0\delta=\omega-\omega_0=\frac{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}\approx\frac{\omega^2-\omega_0{}^2}{2\omega}=\frac{1}{2}\left[\omega-\left(\frac{\omega_0{}^2}{\omega}\right)\right]$$

と書けるので

(240)
$$\cot\left(\frac{\alpha l+i\beta l}{2}\right)\approx-\left\{\frac{l}{4c}\left(\omega-\frac{\omega_0{}^2}{\omega}\right)+i\frac{\beta l}{2}\right\}$$
$$=\left(\frac{\omega l}{4c}-\frac{\pi^2 c}{4\omega l}+i\frac{\beta l}{2}\right),$$

よって

(241)
$$Z^M=iS\rho c\cot\left(\frac{\alpha l+i\beta l}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}S\rho c\beta l-iS\rho c\left(\frac{\omega l}{4c}-\frac{\pi^2 c}{4\omega l}\right)$$

となる．（241）と（233）とを比較すると

(242)
$$R_0{}^M=\frac{\beta\rho c l}{2}S\qquad(\mathrm{N\cdot s/m}),$$
$$M_0=\frac{\rho l S}{4}\qquad(\mathrm{kg}),$$
$$K_0=\frac{\pi^2\rho c^2 S}{4l}=\frac{\pi^2 E S}{4l}\qquad(\mathrm{N/m})$$

となり捧の第一共振周波数附近において，棒の一方の端面から見た定数 $R_0{}^M$ $M_0$ $K_0$ が定められる．

今までは1本の棒について考えて来たが，第 5・68 図のような形の捧の場合には，磁気回路の平均の長さを

(243)
$$l_m\approx 2l$$

と考えて差支えない．よって線輪の巻回数を $N$ 回，線輪に流れる電流を $I$(A) とすると，電流によって生ずる起磁力分布傾度の平均値は

(244)
$$H_1=\frac{NI}{l_m}\qquad(\mathrm{A/m})$$

であり，ヒズミによって生ずる起磁力分布傾度は

(245)
$$H_2=\sigma\varepsilon\qquad(\mathrm{A/m})$$

である．ここで，ヒズミの値を端面 $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ における変位 $\Xi\left(\frac{l}{2}\right)$ を用いて平均し

(246)
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\dot{\Xi}}{\frac{l}{2}} = \frac{2\dot{\Xi}}{l}$$

と仮定すると，ヒズミによる起磁力分布傾度の平均値は

(247)
$$\dot{\bar{H}}_2 = \frac{2\sigma\dot{\Xi}}{l} \qquad (\mathrm{A/m})$$

と表わすことができ(2)，合成の起磁力分布傾度の平均値

(248)
$$\dot{\bar{H}}_t = \dot{H}_1 + \dot{H}_2 = \frac{1}{2l}\left(N\dot{I} + 4\sigma\dot{\Xi}\right)$$
$$= \frac{1}{2l}\left(N\dot{I} - 4\sigma\dot{\Xi}\right) \qquad (\mathrm{A/m})$$

となる．よって磁束密度は

(249)
$$\dot{B} = \mu\dot{H}_t \qquad (\mathrm{T}),$$

全磁束は

(250)
$$\dot{\Phi} = \dot{B}S = \frac{\mu S}{2l}\left(NI - \frac{4\sigma}{i\omega}\dot{\Xi}\right) \qquad (\mathrm{Wb})$$

となる．これより線輪内に生ずる逆起電力は

(251)
$$\dot{E}_c = i\omega N\dot{\Phi} \qquad (\mathrm{V}),$$

綿輪に $I$(A)の電流を流すために電気端子に加えればならぬ電圧は

(252)
$$\dot{E} = R_d{}^E\dot{I} - \dot{E}_c = R_d{}^E\dot{I} - i\omega\frac{\mu S N^2}{2l}\dot{I}$$
$$+ \frac{4\mu S N\sigma}{2l}\dot{\Xi} = Z_d{}^E\dot{I} + A\dot{\Xi} \qquad (\mathrm{V}),$$

ここに

$Z_d{}^E = R_d{}^E - i\omega L_d{}^E$ (Ω)，　(線輪の固定電気インピーダンス)，

$L_d{}^E = \frac{\mu S N^2}{2l} = \frac{\mu S N^2}{l_m}$ (H)，　(線輪のインダクタンス)，

$R_d{}^E$ …… (Ω)，　(綿輪の実効抵抗)，

$A = \frac{2\mu\sigma S N}{l} = \frac{4\mu\sigma S N}{l_m}$　(力係数)．

磁性体内の磁界の変動によって生ずる伸び応力は

(253)
$$\dot{P} = \sigma\dot{B} \qquad (\mathrm{Pa})$$

である．端面に現われる起振力は，1本の捧の両端面に現われる力が相加わることになるが，さらに棒が2本並列に接続されているので

(2)　第一共振点附近における近似．

(254)
$$F_c = 4\,\dot{P}S = \frac{2\mu\sigma S}{l}\left(N\,\dot{I} - \frac{4\sigma}{i\omega}\dot{\Xi}\right)$$
$$= A\,\dot{I} - Z_n{}^M\,\dot{\Xi} \qquad (\mathrm{N})$$

となる．ここに

(255)
$$Z_n{}^M = \frac{8\mu\sigma^2 SN}{i\omega l} = \frac{A^2}{i\omega L_d{}^E} \qquad (\mathrm{N\cdot s/m}).$$

この起振力に打勝って端面を $\dot{\Xi}$ なる速度で振動させるために，端面に加えればならぬ力は

(256)
$$\dot{F} = Z^M\,\dot{\Xi} - \dot{F}_c = Z^M + Z_n{}^M\,\dot{\Xi} - A\,\dot{I}$$
$$= Z_d{}^M\,\dot{\Xi} - A\,\dot{I} \qquad (\mathrm{N})$$

となる．

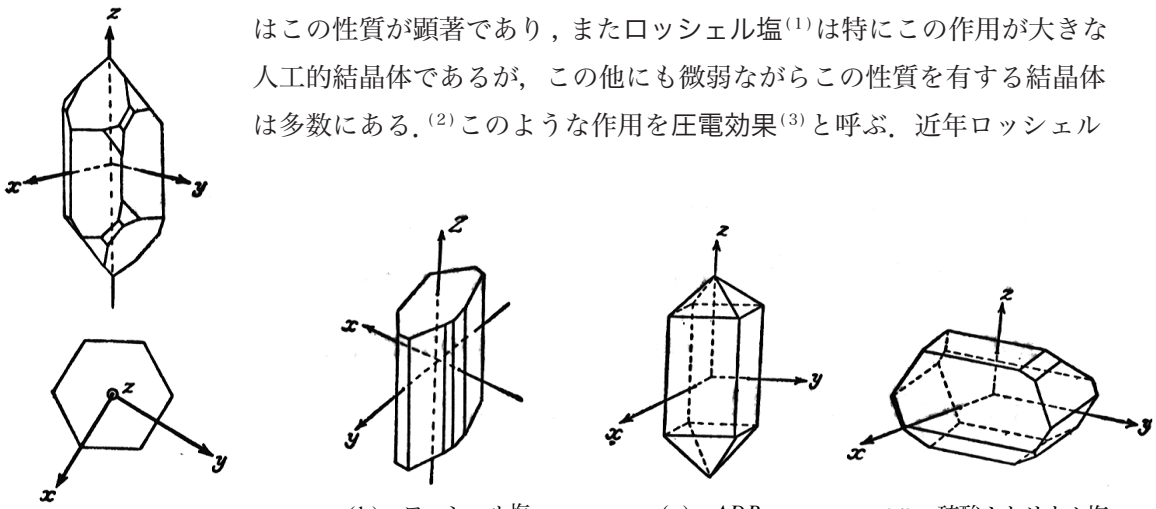
以上より棒状振動子の電気音響交換式は

(257)
$$\dot{E} = Z_d{}^E\,\dot{I} + A\,\dot{\Xi} \qquad (\mathrm{V}),$$
$$\dot{F} = Z_d{}^E\,\dot{\Xi} - A\,\dot{I} \qquad (\mathrm{N})$$

で与えられる．なお振動子の２本の棒を結合している部分は線輪が巻かれていないエネルギー変換には寄与せず，単なる負荷質量の増加と考えるべきである．これらの詳細は文献(3)を参照されたい．

### 5・5・5　圧電型電気音響変成系

a．圧電効果　自然界に存在する結晶体の中にはから機械的の圧力を加えてヒズミを生じさせると結晶の表面に電荷か現われるものがある．たとえば水晶や電気石はこの性質が顕著であり，またロッシェル塩(1)は特にこの作用が大きな人工的結晶体であるが，この他にも微弱ながらこの性質を有する結晶体は多数にある．(2)このような作用を圧電効果(3)と呼ぶ．近年ロッシェル




(a)　水晶　　(b)　ロッシェル塩　　(c)　*ADP*　　(d)　硫酸ナトリウム塩

第5・72図　　圧 電 結 晶 の 結 晶 軸．

---

(3)　小林(勝一郎)：“電気音響”．

(1)　Rochelle salt, $KNaC_4H_4O$, $4H_2O$, Potassium Sodium-Tarterate 酒石酸カリソーダ．

(2)　例えは無線工学ポケットブック．

(3)　piezo-electric effect

塩の他にA.D.P.[4]および硫酸リチウム塩[5]が人工的圧電結晶として音響機器に用いられるようになった．

結晶体は結晶軸を有し，その結晶面は結晶軸と一定の関係位置にある．圧電効果は力の加わる面や方向によって異なることが実験的に知られている．結晶体の結晶面の位置を規定するには，結晶軸を $z$ 軸とし，$z$軸と直交しかつある特定の面とも直交するような軸を$y$ 軸に選び，$y$軸と $z$軸とに直交するように $x$ 軸を定める．この $x$ $y$ $z$ の3本の軸を用いて結晶の各面を規定する．[6]主なる圧電結晶の3軸を第 5・72 図に示す．

圧電効果を有する物質は圧力を加える方向と電荷の現われる方向とに一定の関係があり，この関係は物質によって異なっている．研究の結果によれば，圧電効果は結晶体の内部に生ずる応力と結晶体内部に生ずる電気偏極[7]との間の関係によって規定することができ，結晶体にある方向の応力を生じさせると，この応力によって規定される一定の方向に電気偏極が生ずる．また逆にある方向の電気偏極を与えると，これと一定の関係のある方向に応力を生ずることも知られている．このように圧電効果は可逆的であるが，応力と電気偏極とはそれぞれが方向を持った量であるために取扱いが繁雑である．

今電気偏極を $P^E\,(\mathrm{C/m^2})$ （その座標成分を $P_x{}^E$，$P_y{}^E$，$P_z{}^E$ ）とし，結晶内に生ずる応力を (Pa) とする． $T$ の成分は

$$\begin{pmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z \end{pmatrix}$$

で表わされる．[8]ここに $X_x$，$Y_x$，$Z_x$等は $x$面に作用する応力成分である．圧電効果のある物質では， $P^E$ と $T$ との間に

$$\begin{aligned} P_x{}^E &= d_{11}X_x + d_{12}Y_y + d_{13}Z_z + d_{14}Y_z + d_{15}Z_x + d_{16}X_y\,, \\ P_y{}^E &= d_{21}X_x + d_{22}Y_y + d_{23}Z_z + d_{24}Y_z + d_{25}Z_x + d_{26}X_y\,, \\ P_z{}^E &= d_{31}X_x + d_{32}Y_y + d_{33}Z_z + d_{34}Y_z + d_{35}Z_x + d_{36}X_y \end{aligned} \tag{258}$$

なる関係が存在する．この $d_{ij}$ 等を圧電率と呼び測定によって定められる定数である．

水晶の圧電率は

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(4)　Ammonium Dihydrogen phosphate，$NH_4H_2PO_4$ 燐酸アンモン塩，商品名は PN と呼ばれる．

(5)　Lithium Sulfate，商品名は LH.

(6)　$y$ 軸の定め方はそれぞれの結晶体によって定められる．

(7)　electric poralization

(8)　2・3・1参照．

$$d_{11} = -6.45\times10^{-8} \quad \text{esu of charge/dyne}$$
$$= -6.45\times10^{-8}\times\frac{10^{-4}}{3} = -2.15\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{12} = -d_{11} = +2.15\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{14} = -1.45\times10^{-8} \quad \text{esu/dyne} = -0.483\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{25} = -d_{14} = +0.48\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{26} = -2d_{14} = +0.96\times10^{-12} \quad \text{C/N}$$

である．

ロッシェル塩の圧電率は

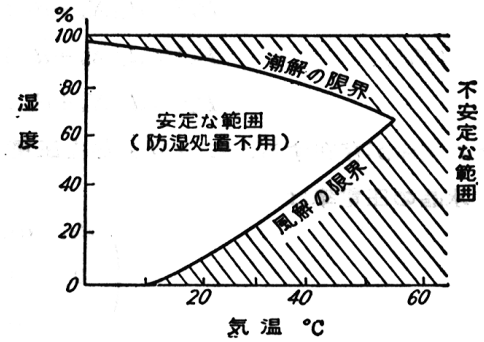
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}$$

$$d_{14} = 340 \sim 8100\times10^{-8} \quad \text{esu/dyne}$$
$$= 113 \sim 2700\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{25} = -1.65\times10^{-8} \quad \text{esu/dyne} = -0.55\times10^{-12} \quad \text{C/N},$$
$$d_{36} = +35.4\times10^{-8} \quad \text{esu/dyne} = 11.8\times10^{-12} \quad \text{C/N}$$

であり，(3)　$d_{14}$ は他のものに比して著しく大きい．このことは，結晶に $Y_z$ または $Z_y$ なる応力成分を与えると $x$ 軸方向に大きな電気偏極を生ずる事を示している．なおロッシェル塩がこのような性質を有するのは－13℃から＋23℃までの間であり，この範囲の外では圧電率が約 $\frac{1}{10}$ に低下する．この限界温度を変態点(10)という．ただし動的使用状態では45℃あたりまで正常の状態が保たれている．

水晶は機械的に強固でその物理定数も安定であるから，古くから振動子として用いられている．LANGEVIN の水晶振動子は超音波帯城の電気音響変成器として水中送受波器(11)に重要なものである．

ロッシェル塩は圧電率および誘電率が異常に大きく，かつその結晶を任意の大きさに育成させることができる等の利点があるので，可聴周波の電気音響変成器に盛んに利用されるようになったが，機械的に脆弱なこと，湿気によって潮解し，乾燥しすぎると風解しかつ物理定数が温度や圧力等の外界の条件によって変化しやすいことなどの欠点も



第5・73 図　　ロッシェル塩の安定な筋囲．

(9)　無線工学ポケットブックによる．圧電率の数値は測定者により多少異なる．Varasek の測定値は八木:・・音戦科学”　p.199 にある．

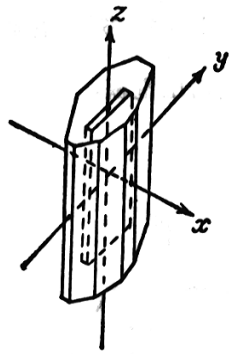
(10)　CURIE point

(11)　hydrophone

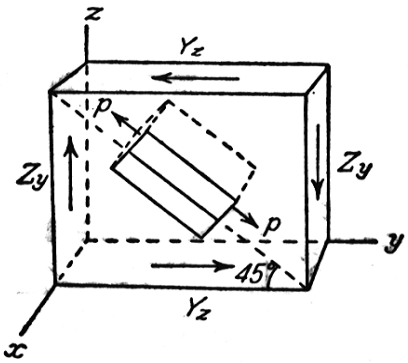
ある．これらの欠点は・包装その他の方法によって次第に解決策が見出されて来た．第5･73図はロッシェル塩の湿度と温度に関する特性を示している．

b. ロッシェル塩振動子

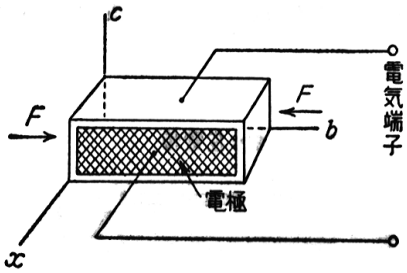
ロッシェル塩を例に取って圧電型電気音響変成の機構を説明しよう．ロッシェル塩の圧電率 $d_{14}$ が異常に大きいということは，結晶の$Y$ 面および$Z$ 面に作用する接線方向の応力$Z_y$ または $Y_z$ によって $x$ 軸方向の電気偏極 $P_x$ が著しく大きく現われることを意味している．すなわち $x$ 軸方向に正負の電荷が分離して二重極を形成するのであるから，これを取出すには $x$ 軸に垂直な対向面に金属板を配置して蓄電器を形成させ電圧変化の形にして取り出すのが便利である．この目的のために第5･74図に示すように $yz$ 面(すなわち $x$面)と平行な面を持った薄い矩形板を切り出す．これを $X$ 板という．この矩形板は第5･75図のように剪断応力 $Z_y$ および $Y_z$ によって対向する $x$ 面に正負電荷が現われるが，また逆に $x$ 面間に正負の電荷を与えて（または電極を設けて電圧を加えて）やれば $Y_z$ および $Z_y$なる剪断応力を生ずるので輪廓スベリ振動板(12)ともいう．しかし剪断応力は $x$ 面を正方形とした場合の対角線上の張力 $p$ で置換することができるから，(13)図のように対角線に平行な軸を有する角捧を切り出し，第5･76図のように $x$ 面に電極を密着させ， $b$ 軸方向に力が加わる




第5･74図　X 板.




第5・75図　90°　X板スベリ振動子から45°　X板厚み振動子を切り出す．




第5･76図　45°　X板縦振動子.

ようにすると，圧力または張力による圧電作用を営ませることができるようになる．これを45°　X板縦振動子(14) (厚み振動子）という．このように結晶の圧電的性質を利用して希望する形の応力と電気偏極とが関連するように作ったものを圧電振動子と呼ぶ．圧電振動形式には．上記の縦振動，厚み振動，輪廓スベリ振動の他に戻り振動，屈曲振動がある．

実際に音響機器としてピックアップやマイクロホンに用いられる振動子は縦振動形式のものではなく，第5･75図に示した $x$板を2枚用い，同電位の電極面が向い合うように貼り合わせ，戻り振動および屈曲振動によって動作するようにしたものである．このように貼り合わせた振動板を圧電板(15)

(12)　shear plate

(13)　2・3・1

(14)　45°　expander plate

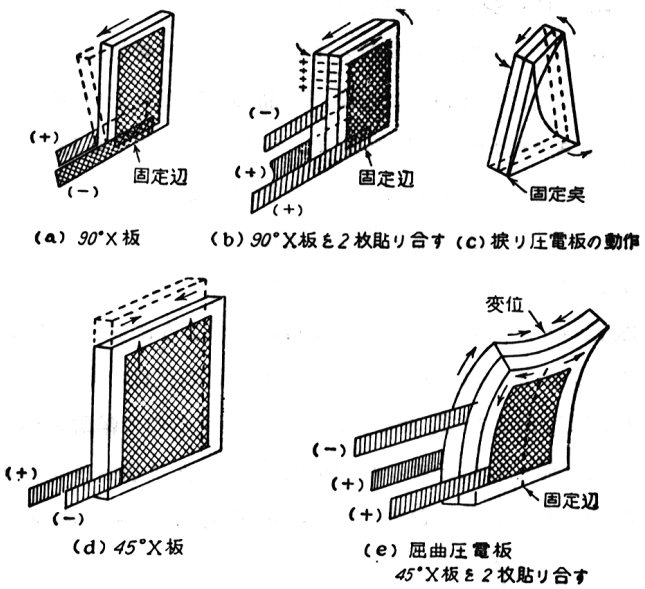
(15)　bender, bimorph, torque bimorph,"bimorph"は Brush Development Co.の商品名である．

(バイモルフ) という (第5·77図).

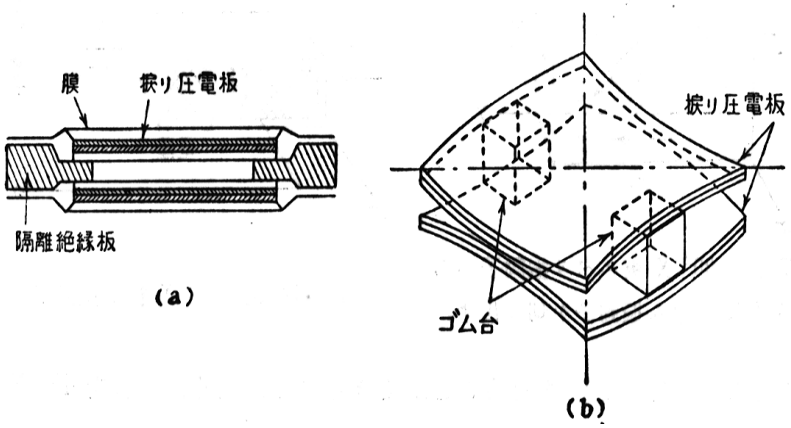
戻り振動板2枚を第5·78図のように隔離絶縁板を介して対向させ，戻り振動板自身をマイクロホンの振動板として利用するようにしたものを音響電池[16]と呼ぶ．音響電池は音圧を両面から受けて振動し，各握り振動板の電気端子には音圧に比例した電圧が現われる．

ロッシェル塩およびA.D.P.を用いた振動子は静水圧を受けても電気端子にはほとんど電圧が現われない．それは静水圧によって結晶が受けるヒズミに関係した3軸方向の圧電係数の代数和がほとんど零となるためである．これに反して硫酸リチウム塩を用い[illegible]動子は静水圧によって電気的出力を振り出すことができる．

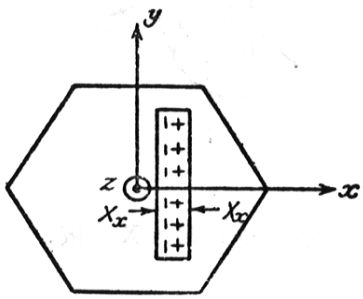
c. 水晶振動子　水晶を用いた振動子




第 5·77 図　戻り圧電板と屈曲圧電板.




第 5·78 図　音響電池の構造.




第 5·79 図　水晶の厚み振動子の切り方.

もその原理はロッシェル塩振動子と変りがなく，ただその結晶の切り方に色々なものがある．第5·79図はその一例で $d_{11}$ を利用した厚み振動をする振動子である．この場合は $x$ 面に作用する圧力 $X_z$ により $x$ 面に偏極 $P_x{}^E$ が現われ，これをXカットと呼ぶ．この他に Y カット，AT カット，BT カット，CT カット，DT カット，GT カット等の切り方があるが，いずれも固有振動数は無線周波数帯にあるので，超音波振動子として利用される．

d. 縦振動型圧電振動子　ロッシェル塩を用いた縦振動型圧電振動子の電気音響変成機構を次に述べておく．すでに述べたように，この型の変成機構は

(16)　sound cell

(259) $$P_x{}^E = d_{14} Y_2 \quad (\mathrm{C/m^2})$$

に基づいて行われる．今第 5・76 図の $b$ 軸方向のヒズミを $\varepsilon_b$ とし，この方向の振動子の YOUNG 率を $E_b$ とすれば，$b$ 軸に垂直な断面に現われる応力 $p_b$ は

(260) $$p_b = E_b \varepsilon_b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_Z + Z_Y\right) = \sqrt{2}\, Y_Z \quad (\mathrm{Pa})$$

である．よって $x$ 方向の電気偏極と $b$ 方向のヒズミとの間に

(261) $$P_x{}^E = \gamma \varepsilon_b ,$$
$$\gamma = \frac{d_{14}}{\sqrt{2}} E_b \quad (\mathrm{C/m^2})$$

なる関係式を得る．これは磁歪現象の VILLARI 効果に相当する．次に振動子間の電界強度の $x$ 成分の平均値を $G_x$ とすると，

(262) $$P_x{}^E = \varepsilon G_x \quad (\mathrm{C/m^2})$$
$$\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0$$

であるから，$b$ 方向の応力 $p_b$ と $x$ 方向の電界強度との間に

(263) $$p_b = \sigma G_x \quad (\mathrm{N/m^2})$$
$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{d_{14}}{\sqrt{2}}\right)} \quad \left(\frac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{V/m}}\right)$$

なる関係を得る．これは磁歪現象の JOULE 効果に相当する．(261) と (263) の関係から振動子に貯えられる機械エネルギー $W^M$ と電気エネルギー $W^E$ ~~灯~~を求めると

(264) $$W^M = \frac{1}{2} p_b \varepsilon_b = \frac{\sigma\gamma}{2\varepsilon} \varepsilon_b{}^2 \quad (\mathrm{J}) ,$$
$$W^E = \frac{1}{2} P_x{}^E G_x = \frac{\gamma^2}{2\varepsilon} \varepsilon_b{}^2 \quad (\mathrm{J})$$

となるが，変成機構が行われるためには両エネルギーは互に等しくなければならない．よって

(265) $$\sigma = \gamma = \frac{d_{14}}{\sqrt{2}} E_b = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{d_{14}}{\sqrt{2}}\right)} \quad \left[\frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{L^2}}\right],$$

となる．したがって $\sigma$ または $\gamma$ をロッシェル塩縦振動子の圧電率効果係数として使用すればよい．

誘電体内の電気偏極ベクトル $P$ と電界強度 $E$ および電気誘導度 $D$ との関係は

(266) $$D = D_0 + P = \varepsilon_0 E_0 + P \quad (\mathrm{C/m^2})$$

で規定される．ここに $E_0$ は誘電体のない真空状態でその場所に生じている電界強度であって外部から加えられるものである．よって誘電体内の電界強度は

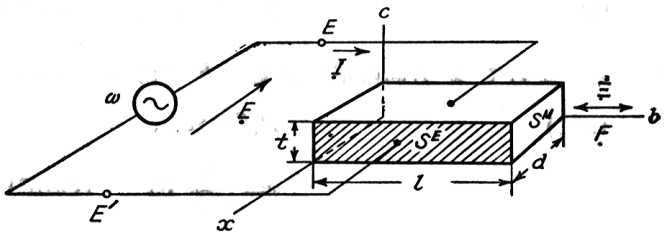
(267) $$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\kappa_e} + \frac{P}{\kappa_e \varepsilon_0} \quad (\mathrm{V/m})$$

となり，外部電界の加わらぬ場合には

(268)　$$E = \frac{P}{\kappa_e \varepsilon_0}$$

となる．

振動子の各部の寸法を第 5・80 図のように定め，電気端子 $E\,E'$ の交番電圧の実効値 $E$ および電流の実効値 $\dot{I}$ と機械端子 $S^M$ 面上の振動速度振幅の実効値 $\dot{\Xi}$ および力の実効値 $\dot{F}$ との間の関係を求めてみよう．振動子の電極間の容量は



第 5·80 図　圧電型電気音響変換系．

(269)　$$C_d = \frac{\varepsilon S^E}{d} = \frac{\varepsilon l t}{d} \quad \text{(F)},$$

印加電圧 $\dot{E}$ によって電極間に現われる電荷の実効値は

(270)　$$\dot{Q}_1 = S^E \dot{P}_x{}^E = C_d \dot{E} \quad \text{(C)}$$

であるが，機械端子の変位の実効値を $\dot{\Xi}$ とするとヒズミは

(271)　$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\Xi}}{l}$$

であるから，このヒズミによって電極間に現われる電荷は

(272)　$$\dot{Q}_2 = \frac{\gamma S^E}{l}\dot{\Xi} = \gamma t \dot{\Xi} \quad \text{(C)}.$$

よって全電荷は

(273)　$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = C_d \dot{E} + A\dot{\Xi} \quad \text{(C)},$$

$$A = \frac{\gamma}{l} S^E = \gamma t \quad \text{（力係数）}.$$

または

$$\dot{I} = -i\omega \dot{Q},$$

(274)　$$\dot{\Xi} = -i\omega \dot{\Xi}$$

を用いて電流と速度で表わせば

(275)　$$\dot{I} = Y_d \dot{E} + A\dot{\Xi} \quad \text{(A)},$$

ここに

$$Y_d = -i\omega C_d,$$

(273) または (275) は電気端子における電圧と電流の平衡式である．

次に機械端子における力と速度の平衡式を求める．まず電極間の電界強度が

(276)　$$\dot{G} = \frac{\dot{E}}{d} + \frac{\dot{P}_x{}^E}{\varepsilon} = \frac{\dot{E}}{d} + \frac{\gamma}{\varepsilon l}\dot{\Xi} \quad \text{(V/m)}$$

であることを用いて端面に現れる力を求めると

(277)
$$\dot{F}_c = \sigma G S^M = \frac{\gamma}{d} S^M \dot{E} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon l} S^M \Xi$$
$$= \gamma t \dot{E} - \frac{\gamma^2}{i\omega\varepsilon l} S^M \dot{\Xi} \quad \text{(N)}$$

となる．ここで

(278)
$$Z_m{}^M = \frac{\gamma^2}{i\omega\varepsilon l} S^M = \frac{A^2}{-Y_d} = \frac{K_n}{-i\omega} \quad (\text{N}\cdot\text{s/m}),$$

(279)
$$K_n = -\frac{A^2}{C_d} \quad \text{(負スティフネス)}$$

とおくと

(280)
$$\dot{F}_c = A\dot{E} - Z_n{}^M \dot{\Xi} \quad \text{(N)}.$$

端面に外から加わる力は $F_c$ に平衡していなければならぬから，端面から振動子を見た機械インピーダンスを $Z_d{}^M$ とすれば

(281)
$$\dot{F} = -A\dot{E} + \left(Z_d{}^M + Z_n{}^M\right)\dot{\Xi} \quad \text{(N)}.$$

よって圧電振動子の基本式は

(282)
$$\dot{I} = Y_d \dot{E} + A\dot{\Xi} \quad \text{(A)},$$
$$\dot{F} = -A\dot{E} + Z^M \dot{\Xi} \quad \text{(N)},$$
$$A = \gamma t = \frac{\gamma}{l} S^E,$$
$$Y_d = -i\omega C_d,$$
$$Z^M = Z_d{}^M + Z_n{}^M,$$
$$Z_n{}^M = \frac{A^2}{-Y_d} = -\frac{K_n}{i\omega},$$
$$K_n = -\frac{A^2}{C_d}$$

で表わされ，この形は静電型の電気音響変成式と同形である．

### 5・5・6 電歪型電気音響変成系

強磁性体の磁歪現象と似た現象が，誘電率の著しく大きいいわゆる強誘電体にも存在することが近年見出され，これを電歪現象と呼んで電気音響変成系に利用されるようになって来た．このような性質を有する代表的な物質はチタン酸バリウム磁器[1]である．これは粉末状のチタン酸バリウムを焼成して磁器にしたものであり，その比誘電率は 1000 を越えるといわれている．

電歪現象とは電界強度の変化によってヒズミが変化することおよび応力の変化によって竜気偏極が変化することを意味し，これによって圧電現象と同様の機構の電気音響変成が行われる．ただ電歪振動子は機械的に強固であり，その形状をかなり自由に作ることができ，しかも電気インピーダンスが

(1)　チタン酸バリウム $TiBa0_3$.

圧電型に比して著しく小さいことが特長である．ただ全体が結晶系を構成していないから製作工程によってムラや不均一の生ずることはさけられないようである．電歪型電気音響変成理論は未だ確立されたとはいえないようであるが，MASON[2] および菊池[3]の提唱には見るべきものがある．

電歪体が等方性均質物体よりなる直方体で，その稜が直角座標（$x$，$y$，$z$）の座標軸と一致するものと仮定し，ヒズミの成分を

$$\begin{array}{c|ccc} & x\text{成分} & y\text{成分} & z\text{成分} \\ \hline x\text{面} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ y\text{面} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ z\text{面} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{array}$$

応力の成分を

$$\begin{array}{c|ccc} & x\text{成分} & y\text{成分} & z\text{成分} \\ \hline x\text{面} & X_x & Y_x & Z_x \\ y\text{面} & X_y & Y_y & Z_y \\ z\text{面} & X_z & Y_z & Z_z \end{array}$$

電気偏極の成分を（$P_x^E$，$P_y^E$，$P_z^E$），電界強度の成分を（$G_x$，$G_y$，$G_z$）と表わすと，ヒズミ成分と応力および電気偏極成分との間の関係は

$$\text{(283)}\quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}\left[X_x - \sigma\left(Y_y + Z_z\right) + \gamma_{11} P_x^{E^2} - \gamma_{12}\left(P_y^{E^2} + P_z^{E^2}\right)\right], \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}\left[Y_y - \sigma\left(Z_z + X_x\right) + \gamma_{11} P_y^{E^2} - \gamma_{12}\left(P_z^{E^2} + P_x^{E^2}\right)\right], \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}\left[Z_z - \sigma\left(X_x + Y_y\right) + \gamma_{11} P_z^{E^2} - \gamma_{12}\left(P_x^{E^2} + P_y^{E^2}\right)\right], \end{cases}$$

$$\text{(284)}\quad \begin{cases} \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{\mu}\left[Y_z + \dfrac{\gamma_{11}+\gamma_{12}}{1+\sigma} P_x^E \cdot P_y^E\right], \\ \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{\mu}\left[Z_x + \dfrac{\gamma_{11}+\gamma_{12}}{1+\sigma} P_y^E \cdot P_z^E\right], \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{\mu}\left[X_y + \dfrac{\gamma_{11}+\gamma_{12}}{1+\sigma} P_y^E \cdot P_z^E\right] \end{cases}$$

と表わされる．ここに $E$ は電歪体のYOUNG率，$\sigma$ はPOSSION比，$\mu$ は剛性率，$\gamma_{11}$ は縦効果電歪係数，$\gamma_{12}$ は横効果電歪係数である[4]．逆にヒズミによって生ずる電気偏極は

$$P_z^E = \varepsilon\left\{G_x + \frac{2P_x^E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\left[\left\{(1-\sigma)\gamma_{11} - 2\sigma\gamma_{12}\right\}\varepsilon_{xx} + (\sigma\gamma_{11} - \gamma_{12})(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right]\right.$$

（2）　W.P.MASON:“Piezo-electric Crystals and their Application to Ultra-sonics” 1950.

（3）　菊池(喜充)・鈴木(辰男)：“電歪率を用いた電歪現象の基本式について” 電気三学会建合大会論文集，1952 年 5 月，“電歪振動子各種振動様式の電気機紙諸定数” 東北大，電通談話会記録代第22巻第2号，1953 年 10 月．

（4）　$[\gamma] = \left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right] = \left[\mathrm{I}^{-1}\mathrm{MLT}^{-3}\right]$.

$$+\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{12})}{(1+\sigma)}\left(P_z{}^E\varepsilon_{zx}+P_y{}^E\varepsilon_{xy}\right)\Bigg\},$$

(285)
$$P_y{}^E=\varepsilon\Bigg\{G_y+\frac{2P_y{}^E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\Big[\left\{(1-\sigma)\gamma_{11}-2\sigma\gamma_{12}\right\}\varepsilon_{yy}+(\sigma\gamma_{11}-\gamma_{12})(\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{xx})\Big]$$
$$+\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{12})}{(1+\sigma)}\left(P_x{}^E\varepsilon_{xy}+P_z{}^E\varepsilon_{yz}\right)\Bigg\},$$

$$P_z{}^E=\varepsilon\Bigg\{G_z+\frac{2P_z{}^E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\Big[\left\{(1-\sigma)\gamma_{11}-2\sigma\gamma_{12}\right\}\varepsilon_{zz}+(\sigma\gamma_{11}-\gamma_{12})(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})\Big]$$
$$+\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{12})}{(1+\sigma)}\left(P_y{}^E\varepsilon_{yz}+P_x{}^E\varepsilon_{zx}\right)\Bigg\},$$

と表わされる．ただし $\varepsilon$ は電気誘導容量である．

電歪振動子を実際に使用する場合には，一つの軸方向たとえば $x$ 方向にのみ永久電気偏極 $P_{x0}{}^E$ を与え，他の方向には永久偏極を与えないのが普通である．このような状態で $P_{x0}{}^E$ に交番偏極 $P_x{}^E e^{-i\omega t}$ を重畳し，$P_x{}^E \ll P_{x0}{}^E$ を満足する範囲で使用する．このような場合には

(286)
$$P_x{}^{E^2}=\left(P_{x0}{}^E+P_x{}^E e^{-i\omega t}\right)^2\approx P_{x0}{}^{E^2}+2P_{x0}{}^E\cdot P_x{}^E e^{-i\omega t},$$
$$P_{y0}{}^E=P_{z0}{}^E=0$$

とみなすことができるので，(283) と (284) および (286) の交番振動をする部分のみを取り出して実効値で表わすと

(287)
$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_{xx}=\dfrac{1}{E}\left[\dot{X}_x+\Gamma_{11}\dot{P}_x{}^E-\sigma\left(\dot{Y}_y+\dot{Z}_z\right)\right],\\ \dot{\varepsilon}_{yy}=\dfrac{1}{E}\left[\dot{Y}_y+\Gamma_{12}\dot{P}_x{}^E-\sigma\left(\dot{Z}_z+\dot{X}_x\right)\right],\\ \dot{\varepsilon}_{zz}=\dfrac{1}{E}\left[\dot{Z}_z+\Gamma_{12}\dot{P}_x{}^E-\sigma\left(\dot{X}_x+\dot{Y}_y\right)\right],\end{cases}$$

(288)
$$\dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{1}{\mu}\left[\dot{X}_y+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{11}+\Gamma_{12}}{1+\sigma}\dot{P}_x{}^E\right],$$
$$\dot{\varepsilon}_{xz}=\frac{1}{\mu}\left[\dot{X}_z+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{11}+\Gamma_{12}}{1+\sigma}\dot{P}_x{}^E\right],$$

(289)
$$\dot{P}_x{}^E=\varepsilon\Bigg\{G_x+\frac{1}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\Big[\left\{(1-\sigma)\Gamma_{11}-2\sigma\Gamma_{12}\right\}\dot{\varepsilon}_{xx}$$
$$+(\sigma\Gamma_{11}-\Gamma_{12})\left(\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}\right)\Big]\Bigg\}$$

となる[5]．ただし

(290)
$$\Gamma_{11}=2P_{x0}{}^E\gamma_{11},$$
$$\Gamma_{12}=2P_{x0}{}^E\gamma_{12}.$$

(5)　$[\Gamma]=\left(\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right)=\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$.

(287) ～ (289) は $x$軸方向に永久偏極を加えた場合の電歪現象の基本式である． $\Gamma_{11}$ は縦効果電歪率，$\Gamma_{12}$ は横効果電歪率である．

チタンバリウム磁器を電歪振動子として使用する場合には棒状振動子の縦振動，板状振動子の厚み振動，捧状振動子の横振動，円板状振動子の径方向振動，矩形板状振動子の剪断振動などが用いられる．チタン酸バリウム磁器の物理定数は

$$
\begin{aligned}
&\text{変態点} \quad 120^\circ\ \mathrm{C}\,,\\
&E = 9.75 \times 10^{10} \quad \mathrm{N/m^2}\,,\\
&\mu = 3.84 \times 10^{12} \quad \mathrm{N/m^2}\,,\\
&\sigma = 0.27\,,\\
&\kappa_e = 110\,,\\
&\Gamma_{11} = 4 \times 10^5 \quad \mathrm{N/m^2}\,,\\
&\Gamma_{12} = 1.48 \times 10^5 \quad \mathrm{N/m^2}\,,\\
&G = 4 \sim 6 \times 10^6 \quad \mathrm{V/m}\,.
\end{aligned}
$$

電歪率と振動子の構造が定まれば圧電振動子の場合と同様の操作によって電気音響変換理論を組立てることができるからここでは重複しないことにする．