(35)
$$\mu_n^2-\kappa_n^2 \approx \begin{cases} -\dfrac{\eta}{\pi}(\sigma_1+\sigma_2), & (n=0), \\ n^2-\dfrac{2\eta}{\pi}(\sigma_1+\sigma_2), & (n>0), \end{cases}$$
$$\frac{4\pi\mu_n\kappa_n}{\eta} \approx \begin{cases} 2(\gamma_1+\gamma_2), & (n=0), \\ 4(\gamma_1+\gamma_2), & (n>0), \end{cases}$$

ただし

(36)
$$\gamma = \frac{\rho_0 c}{|Z^A|}\cos\varphi, \qquad |\zeta| \gg n(n+1)$$
$$\sigma = -\frac{\rho_0 c}{|Z^A|}\sin\varphi.$$

となり，減衰定数の近似値は

(37)
$$k_N \approx \frac{c}{8V}\left[8e_{nx}(\gamma_{x1}+\gamma_{x2})S_x+8e_{ny}(\gamma_{y1}+\gamma_{y2})S_y+8e_{nz}(\gamma_{z1}+\gamma_{z2})S_z\right]$$

となる．ここに V は室の容積，S_x は $-x$ 面および $+x$ 面の面積の和であり，

(38)
$$e_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (n=0) \\ 1, & (n>0) \end{cases}$$

は**波動姿態係数**[8]と呼ばれる．(37) の右辺は **SABINE** の与えた減衰定数の式とよく似ている．よって **8・2・1** の (14) と比較すると，$-x$ 面の吸音率に相当する量は $8e_{nx}\gamma_{x1}$ となり矩形室内の定常状態音場から求めた吸音率は波動姿態の函数の形で表わされることが示される．

有響室内で**残響法**[9]によって壁材料の吸音率を測定する場合のように，硬い壁で囲まれた中に一つだけ柔らかい壁面がある場合には，(24) と (25) とから近似的に共鳴周波数と制動係数とを求めることができる．今 $+x$ 面が柔らかいものとし，(26) の第二項の因数を

(39)
$$G^{(+)}e^{i\theta(+)} = \frac{1}{\left[1+\dfrac{i\dfrac{\beta^{(+)}\eta}{\pi}}{\chi^{(+)2}-(\beta^{(+)}\eta)^2}\right]}$$

なる規準化函数で表わすと，$\beta^{(+)}$ が小さい場合には，$n>0$ ならば $\theta^{(+)}$ は小さくかつ $G^{(+)}$ は1となり，$n=0$ ならば $G^{(+)}$ は $\dfrac{1}{2}$ となるので，$\beta^{(+)}$ を小さくすると (39) の G と θ は (38) の波動姿態係数 e_n に収斂する．一方 $\beta^{(+)}/n$ が大きな場合には，$G^{(+)}$ と $\theta^{(+)}$ とは**第 8・29 図**から求めることができ，また $\Omega^{(+)}$ と $(\Delta^{(+)}/2n)$ とは柔らかい壁面のインピーダンスとその位相角を用いて第 8・28 図から求められる．よって柔らかい壁面 $(+x)$ とその対向壁面 $(-x)$ とが，室の共鳴角速度

(8)　wave type factor
(9)　reverberation method

ω_N と減衰定数 k_N とに寄与する大きさは

$$\mu^2-\kappa^2=\Omega^{(+)}+\frac{2\rho_0 c\eta G^{(+)}}{\pi\left|Z^{(A-)}\right|}\sin(\varphi^{(-)}-\theta^{(+)}),$$

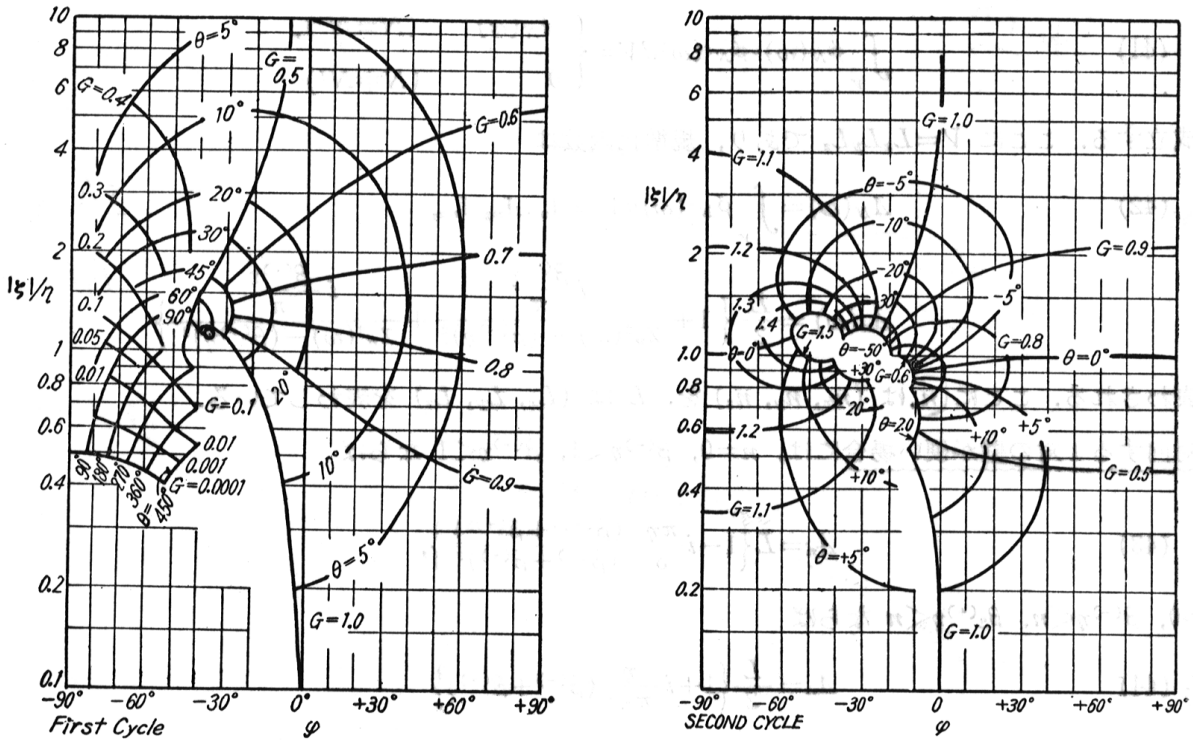
(40)

$$\frac{4\pi\mu\kappa}{\eta}=\frac{\Delta^{(+)}}{\eta}+\frac{4\rho_0 cG^{(+)}}{\left|Z^{(A-)}\right|}\cos(\varphi^{(-)}-\theta^{(+)}),$$

と表わされる．ただし（13）と（32）より

$$\chi^{(+)2}=\Omega^{(+)}+i\frac{\Delta^{(+)}}{2\pi}$$

である．なお (ζ/η) が**第 8・29 図**に示してある値以上に大きな場合には，十分な近似度をもって $G=1$，$\theta=0$ とおくことができる．



(*a*)　第8・28図（a）の第一面において規準化函数 $Ge^{i\theta}$ を壁面インピーダンス函数 $\ln(\zeta/\eta)$ に変換する図表.

(*b*)　第二面において $Ge^{i\theta}$ を $\ln(\zeta/\eta)$ に変換する図表.

第 8・29 図

この結果を見ると，1 対の対向壁の一方が柔らかく，他方が硬い場合の壁面の吸音力は対向する両壁の吸音力の和で表わされないことが示されている．柔らかい壁（$+x$）に対向した使い壁（$-x$）が室内音場の ω_N と k_N とに寄与する大きさは $-x$ 面のインピーダンスで定まる量を $G^{(+)}$ と $\theta^{(+)}$ とで修正した形で表わされているが，$G_2^{(+)}$ と $\theta^{(+)}$ とは柔らかい壁（$+x$）のインピーダンスに関係した量であるから，結局，柔らかい壁の存在が室内に分布する定在波の姿態を大幅に変化させていること

を意味する．すなわち，ある場合（ $n=0$ または $\varphi^{(+)}>0$ でかつ $n>0$ なる場合）には柔らかい壁面の近傍の音圧が対向壁（硬い壁）面上の音圧より著しく大きくなるので硬い壁の影響は相対的に減殺された結果となり，またある場合（ $n>0$ でかつ柔らかい壁に対して $\varphi^{(+)}<0$ なる場合）には硬い壁の近くに比して柔らかい壁の近くの音圧が小さくなるために $G^{(+)}$ が１より大きくなる．あるいは特に極端な場合として， $|\zeta^{(+)}|/\eta<1$ にして $n=0$ かつ $\varphi^{(+)}<0$ の場合には $G^{(+)}$ は非常に小さくなるので，硬い壁はほとんど吸音しないようになる．この場合には柔らかい面から遠ざかるにしたがって音圧は指数函数の形で減少し，硬い壁面上の音圧はほとんど無視できる程度に小さくなり，硬い面に吸収されるエネルギーはほとんど存在しなくなる．

柔らかい壁面で囲まれた室内の音場の波動函数 ϕ_N は**直交性**を有し

(41)
$$\int_V \phi_N(\omega)\cdot\phi_{N'}(\omega)dV=\begin{cases}\Lambda_N(\omega) & (N=N'),\\ 0 & (N\neq N')\end{cases}$$

が成立する．ここに $V=L_xL_yL_z$ であり，規準化因数は

(42)
$$\Lambda_N(\omega)=\int_V \phi_N^2(\omega)dV=\Lambda_{nx}\Lambda_{ny}\Lambda_{nz}\ ,$$

$$\Lambda_n(\omega)=\frac{L}{2}\left\{1+\frac{i\dfrac{\beta^{(-)}\eta}{\pi}}{\chi_n^2(\omega)-(\beta^{(-)}\eta)^2}+\frac{i\dfrac{\beta^{(+)}\eta}{\pi}}{\chi_n^2(\omega)-(\beta^{(+)}\eta)^2}\right\}$$

と表わされる．ここに n は (n_x, n_y, n_z) を， L は (L_x, L_y, L_z) を表わしている．

<u>対向する１対の壁が硬い場合</u>には， $n=0$, $\beta^{(-)}\eta<1$, $\beta^{(+)}\eta<1$ ならば

(43)
$$\Lambda_n=L\left\{1-i\frac{\pi\eta}{3}\frac{(\beta^{(-)3}+\beta^{(+)3})}{(\beta^{(-)}+\beta^{(+)})^2}\right\},$$

$n>0$, $\beta^{(-)}\eta<n$, $\beta_2^{(+)}\eta<n$ ならば

(44)
$$\Lambda_n=\frac{L}{2}\left\{1+i\frac{\eta}{\pi n^2}(\beta^{(-)}+\beta^{(+)})\right\}$$

と表わされる．また<u>すべての壁が剛壁の場合</u>には

(45)
$$\Lambda_N\Rightarrow\varepsilon_N V\quad ,$$

ここに

(46)
$$\varepsilon_N=\frac{\frac{1}{8}}{e_{nx}\cdot e_{ny}\cdot e_{nz}}=\begin{cases}1 & (n_x=n_y=n_z=0),\\ \frac{1}{2} & (\text{二つの } n \text{ が零の場合}),\\ \frac{1}{4} & (\text{一つの } n \text{ のみが零}),\\ \frac{1}{8} & (\text{三つとも零でない})\end{cases}$$

と表わされる．また対向壁の一方（ $+x$ 壁）が柔らかく，反対側が硬い場合には（39）と（40）とより

（47）
$$\Lambda_n \approx \frac{L}{2}\left[\frac{1}{G_2}e^{-i\theta_2}+i\frac{\beta^{(-)}\eta}{\pi\chi_2^2}\right]$$

となる．

対向壁の一方（ $-x$ 壁）だけが硬い場合の規準函数の形は

（48）
$$D_{nx} \approx \mathrm{Cosh}\left[\frac{i\pi\chi_x}{L_x}x+\frac{\beta_x^{(-)}\eta_x}{\chi_x}\right]$$

と表わされるが，対向壁（ $+x$ 壁）も共に硬い場合には

（49）
$$D_{nx} = \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{\frac{\pi\eta_x}{i(\beta_x^{(-)}+\beta_x^{(+)})}}\ \frac{1}{L_x}\left\{\beta_x^{(-)}(x-L_x)+\beta_x^{(+)}x\right\}\right], \qquad (n=0),$$

（50）
$$D_{nx} = \mathrm{Cosh}\left[\left(i\frac{n\pi}{L_x}x-\frac{\eta}{nL_x}\right)\left\{\beta_x^{(-)}(x-L_x)+\beta_x^{(+)}x\right\}\right], \qquad (n_x>0)$$

と表わされる．この結果を用いて音響インピーダンスが音波の入射方向によって変化しないような吸音物質で壁面が一様に覆われている室内の音場の分布を求めることができる．

壁面物質の音響インピーダンスが音波の入射角 $\theta^{(i)}$ によって変化する場合には，室内音場の精密解を求めることはできないが，壁面が比較的硬い場合には， x 面への入射角は近似的に

（51）
$$\theta_x^{(i)} \approx \cos^{-1}\left(\frac{\dfrac{n_x}{L_x}}{\sqrt{\left(\dfrac{n_x}{L_x}\right)^2+\left(\dfrac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\dfrac{n_z}{L_z}\right)^2}}\right)$$

で与えられるから，この $\theta^{(i)}$ に対する x 壁面のインピーダンスの値を求めることができれば μ_x と κ_x とが計算できる．このようにして求めた近似値の精度が不十分な場合には，今求めた μ_x と κ_x とを用いて

（52）
$$\cos\theta_x^{(i)} = \frac{\pi c}{\omega_N L_x}\sqrt{\mu_x^2-\kappa_x^2}$$

より入射角 $\theta_x^{(i)}$ の第二近似値を求め，同様の操作を操返して μ_x と κ_x の第二近似値を求めることができる．

室内の V_0 なる体積の中に音源が分布しているものとし， V_0 内の１点 (x_0, y_0, z_0) の音源の強さを $q(\mathrm{m}^3/\mathrm{sec})$ なる点音源で表わすと， $e^{-i\omega t}$ なる持続正弦波が輻射される場合の室内の任意の点 (x, y, z) の速度ポテンシャルの $\Phi(x, y, z, t)$ は

（53）
$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -q(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$q = Q_0(x_0, y_0, z_0)e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

なる強制波動方程式の解として与えられる．よって Φ と Q_0 とを波動函数の ϕ_N の級数で展開すれば（53）の解を求めることができるが，音源の強制波形を $-i\omega$ 系で表わしているから，この級数は $(-\omega/2\pi)$ なる周波数に対して境界条件を満足せねばならない．よって Φ と Q_0 とを波動函数 $\phi_N(-\omega)$

と固有値 $(\omega_N - ik_N)$ を用いて級数に展開すると，(53) の解は

(54)
$$\Phi = -c^2 \sum_N B_N \frac{\phi_N(-\omega, x, y, z)}{\omega^2 - (\omega_N - ik_N)^2} e^{-i\omega t},$$

ここに

(55)
$$B_N = \frac{1}{\Lambda_N(-\omega)} \int_{V_0} Q_0 \phi_N(-\omega, x_0, y_0, z_0)\, dv.$$

もしも1個の点音源が点 (x_0, y_0, z_0) に存在する場合には

(56)
$$B_N = \frac{Q_0 \phi_N(-\omega, x_0, y_0, z_0)}{\Lambda_N(-\omega)}$$

となり，(x, y, z) 点に生ずる定常状態の音圧は

(57)
$$p(x, y, z, t) = -i\omega\rho_0 \Phi = +i\omega\rho_0 c^2 Q_0 \sum_N \frac{\phi_N(-\omega, x_0, y_0, z_0) \cdot \phi_N(-\omega, x, y, z)}{\Lambda_N(-\omega) \cdot \left\{ \omega^2 - \omega^{2'} + i2\omega_N k_N \right\}},$$

ここに

$$\omega_N^{'2} = \omega_N^2 - k_N^2$$

と表わされる．これは**定常状態伝送特性**である．

(54) を見ると，強制振動数 $\omega/2\pi$ が共鳴振動数 $\omega_N/2\pi$ と等しくなった場合に受音点の**音圧が極大峰**となることが示されている．強制振動数 $\omega/2\pi$ を，**平均自乗音圧** (10) 極大値の半分となるまで共鳴振動数 $\omega_N/2\pi$ から変化させたときの振動数の変化量 $\Delta\nu$ を共鳴の**半値幅** (11) と呼び，

(58)
$$\Delta\nu = \frac{k_N}{2\pi} \quad (\mathrm{Hz}), \qquad Q = \frac{\omega_N}{\Delta\nu} = \frac{\omega_N}{2k_N}$$

で与えられる．波長が室の寸法に比して小さくない範囲（低音域）では，相隣る共鳴振動数の間隔は半値幅より大きい場合が多く，したがって各共鳴峰は孤立して存在し，伝送特性に著しい山と谷とを生ずる．したがって，この範囲では，各共鳴姿態を分離して励振することができる．一つの共鳴姿態を分離して励振することのできる**限界振動数** ν_c (Hz) を求めるには，振動数 ν 以下の固有値の数が (7) で与えられることより，(7) を微分したものを1に等しいとおけば

(59)
$$dm(\nu) = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu + \frac{\pi S}{2c^2} \nu d\nu + \frac{L}{8c} d\nu = 1$$

となり，$d\nu$ は相隣る共鳴振動数の間隔を表わすから，その第一近似値

(60)
$$d\nu \approx \frac{c^2}{4\pi V \nu^2} \quad (\mathrm{Hz})$$

が半値幅の2倍 $(k_N/2\pi)$ より大きい範囲では各共振峰が分離して存在するものと考えて，**低音域限界周波数** ν_L を

(61)
$$\nu_L = \sqrt{\frac{c^3}{2Vk_N}} \quad (\mathrm{Hz})$$

---

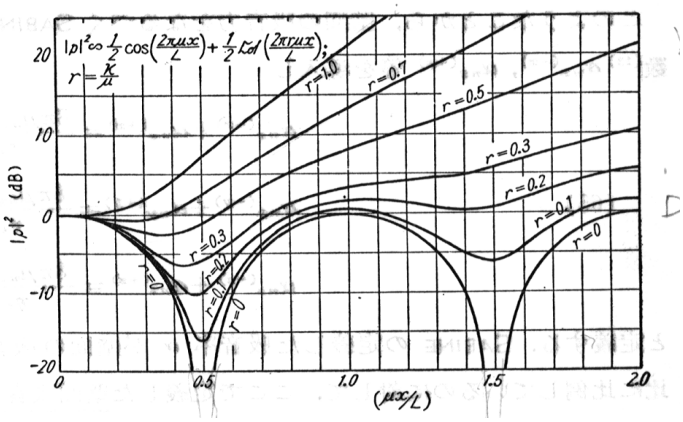
(10) mean square pressure
(11) half breadth

と表わすことができる．

励振周波数 ν が低音域限界周波数 ν_L より低い範囲では，個々の共鳴姿態を分離し励振することができるから，空気粒子の運動方向をも考えに入れて，個々の姿態を研発することができる．このような場合を**低音域現象**と呼ぶ． $-x$ 面を剛壁とし， $+x$ 面い吸音壁を設けた場合の波動函数の x 成分の平方は（48）より

$$\left|D_{nx}(x)\right|^2 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi\mu_x}{L_x}x\right) + \mathrm{Cosh}\left(\frac{2\pi\kappa_x}{L_x}x\right)\right] \tag{62}$$

と表わされる．よって，低音域現象の成立する範囲で第 n_x 次共鳴姿態が励振された場合の x 軸に沿う平均自乗音圧の分布は（62）にて表わされ，その形は (κ/μ) をパラメータとして**第 8・30 図**に示されている．したがって，有響室にて第 n_x 次姿態の定在波の分布をマイクロホンを移動して測定した結果を第 8・30 図と比較することによって， $+x$ 壁面上の吸音物質の第 n_x 次姿態に対する κ_x と μ_x とを知ることができる．



第8・30図　座標軸 (x) に沿う平均自乗音圧の分布.

励振周波数が低音域限界周波数 ν_L よりはるかに高くなると，狭い周波数帯域内に多数の共鳴姿態が密集して存在するようになるので，個々の姿態を独立に励振することはできなくなるが，共鳴姿態がほとんど連続的に分布していると見なされるので統計論的に取扱うことができるようになる．このように共鳴姿態が密集して存在するようになる限界周波数を大略 $10\nu_L$ と考え

$$\nu > \sqrt{50\frac{c^3}{Vk_N}} = \nu_H \qquad (\mathrm{Hz}) \tag{63}$$

なる範囲で生ずる現象を室の**高音域現象**と呼び， ν_H を**高音域限界周波数**と呼ぶ.

高音域においては $\mu \gg \kappa$ なる場合か多く，このような場合には規準化因数として（45）を用いることができるが，この近似は共鳴姿態の大部分を占める斜波動に対してのみよい結果を与え，一つまたはそれ以上の壁面が柔らかい場合の面平行波動および軸平行波動には余りよい近似を与えない．しかし，斜波動が大部分を占める高音域において，吸音壁を有する室の共鳴振動数は（30）に示されたように剛壁の場合と相違しても，共鳴振動数の分布密度は剛壁の場合と同様に（7）で与えられるものと仮定し，角周波数の ω の $\omega + d\omega$ の間に分布する共鳴振動数の数の第一近似値を

$$\begin{cases} dm_p \approx \dfrac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3}d\omega & (\text{斜波動の数}), \\ dm_t \approx \dfrac{L_y L_z \omega}{2\pi c^2}d\omega & (yz\ \text{面平行波動の数}), \end{cases} \tag{64}$$

$$\left\{ dm_a \approx \frac{L_x}{\pi c} d\omega \qquad (x\text{ 軸平行波動の数}) \right.$$

と表わすことができる．一方，(30) の ω_N は周波数空間の第一象限の全領域に分布する格子点を指示する空間ベクトルと見なされ，その格子点の分布密度は (64) で表わされる．よって ω_N を**波動姿態ベクトル**[12]という．

制動係数 k_N は，(37) から明らかなように，比較的硬い壁を有する室内に生ずる斜波動の場合には，波動姿態ベクトル ω_N の方向つまり，n_x, n_y, n_z の相対的大きさには余り影響されず，ただ ω_N の大きさにのみ関係する．またベクトルの ω_N がたとえば z 面と平行になるような xy 面平行波動の場合には，制動係数 k_N は斜波動の場合とは異なる一定値に保たれている．また柔らかい壁面が 1 面ないし 2 面存在する場合にも，大部分の斜波動の制動係数はほとんど同じ値を有している．

このようなことから，壁面の吸音力をなるべく SABINE の表現に近い形で表わすために**壁両吸音係数**[13] $\alpha_{nx}^{(-x)}, \alpha_{nx}^{(+x)}$ 等を導入し

$$\alpha_{nx}^{(-x)} + \alpha_{nx}^{(+x)} = \frac{8\pi\mu_{nx}\kappa_{nx}}{\eta_x},$$

(65)
$$\alpha_{ny}^{(-y)} + \alpha_{ny}^{(+y)} = \frac{8\pi\mu_{ny}\kappa_{ny}}{\eta_y},$$

$$\alpha_{nz}^{(-z)} + \alpha_{nz}^{(+z)} = \frac{8\pi\mu_{nz}\kappa_{nz}}{\eta_z}$$

と定義する．SABINE の定義した吸音率 α が壁面の吸音エネルギーと壁面への入射エネルギーとの比に比例しているのに対して，ここで定義した壁面吸音係数はむしろ壁面の吸音エネルギーと室内の平均音響エネルギーとの比に比例していると見なされるものであり，波動姿態によっては 1 よりも大きくなることもある．実際に壁面係数を利用するためには室の各壁面に対する壁面吸音係数を求めておくことが便利である．

壁面の音響インピーダンス密度が $|Z^A|e^{i\varphi}$ であり，壁面が硬く $(|Z^A|/\eta) > \rho_0 c$ であり，かつ波動姿態ベクトル ω_N がこの壁面と平行とならない場合の壁面吸音係数は

(66)
$$\alpha_p = 8\gamma = \frac{8\rho_0 c}{|Z^A|}\cos\varphi \qquad (\text{主壁面係数})$$

と表わされ，これを**主壁面係数**[14]と呼ぶ．壁面が硬く，かつ波動姿態ベクトル ω_n が壁面に平行な場合には，壁面吸音係数は

(67)
$$\alpha_S^{(-)} = \frac{8\rho_0 c G^{(+)}}{|Z^{A(-)}|}\cos(\varphi^{(-)} - \theta^{(+)}) \qquad (\text{副壁面係数})$$

と表わされ，これを**副壁面係数**[15]と呼び，対向面の影響が加わっていることが示されている．壁面

(12) wave vector
(13) wall coeffcient
(14) normal coeffcient. 垂直壁面係数ともいう．
(15) supplementary coeffcient

が柔らかく，かつ波動姿態ベクトルが壁面と平行な場合には

(68)　$$\alpha_t = \frac{2\Delta}{\eta} \qquad (\text{接壁面係数})$$

と表わされ，これを**接壁面係数**[16]と呼び，Δ は $n=0$，$n=1$ 等にしたかって第8・28図から求めることができる．しかし $(|Z^A|/\eta) > 4\rho_0 c$ の範囲では α_s も α_t も $\frac{1}{2}\alpha_p$ に近づく．

特定の波動姿態 N が励振されている場合の減衰定数は（31）と（65）とから

(69)　$$k_N = \frac{c}{8V} a_N ,$$
$$a_N = (\alpha^{(-x)} + \alpha^{(+x)}) L_y L_z + (\alpha^{(-y)} + \alpha^{(+y)}) L_z L_x + (\alpha^{(-z)} + \alpha^{(+z)}) L_x L_y$$

と表わされ，a_N を**室の第 N 次共鳴姿態の吸音力**[17]という．a_N の中の $\alpha^{(-x)}$ 等は壁の状態と波動ベクトルの方向とによって α_p, α_S または α_t のいずれかを取る．

既に述べたように，室内の定常状態音場（57）を構成する級数の各項に相当する定在波成分の制動係数 k_N は波動ベクトル ω_N の大きさにのみ関係し方向には関係しないこと，および（63）を満足するような高音域では，級数の各項の N についての総和を求める代りに波動ベクトルの ω_N を大きさおよび方向について周波数空間の第一象限全域に積分してもよいことが明らかになった．しかして（57）の $\phi_N(-\omega, x_0, y_0, z_0) \cdot \phi_N(-\omega, x, y, z)$ は，双曲線函数を指数函数で置換すると64個の指数函数の積の形で表わされ，その一つは

(70)　$$e^{(i/c)(\omega_N - ik_N) \cdot R}$$

なる形となる．ここに

(71)　$$R = (x - x_0) i_x + (y - y_0) i_y + (z - z_0) i_z$$

は音源から受音点にに空間ベクトルであり，波動ベクトル

(72)　$$\omega_N - ik_N = (\omega_{nx} - ik_{nx}) i_x + (\omega_{ny} - ik_{ny}) i_y + (\omega_{nz} - ik_{nz}) i_z$$

の方向は比 $n_x : n_y : n_z$ によって与えられる．（70）と同形の指数函数形を有する因数は（70）の他に7個存在し，それは $(\omega_N - ik_N)$ の代りに周波数空間内の第一象限以外の7象限に生ずる $(\omega_N - ik_N)$ の鏡像によって表わされている．よって，この8個の因数を周波数整間の第一象限内で全方向について積分する代りに，1個の因数を周波数空間の全領域（8象限）にわたって積分してもよいであろう．しかして，この8個の因数のほかにベクトル R を壁面に関する音源の鏡像と受音点との間の距離に置換した形の因数が存在する．

前述した8個の因数を周波数空間の全方向に対して積分する場合に，ベクトル R の大きさに制限が生ずる．それは，（57）の分母を見るとわかるように，被積分函数は ω_N が $\omega - k_N$ と $\omega + k_N$ の間に存在する場合にのみ大きな値となって，積分に有効に寄与するので，ベクトルの ω_N が有効な寄与を

(16)　grazing coefficient または tangential coefficient
(17)　room absorption factor

与えるような周波数空間内の領域で，しかも定められた方向を有するベクトルの級数和を，すべての方向の積分形に置換することが可能なためには，ω_N を一つの定められた方向からこれに最も近いもう一つの定められた方向に変化したときの $\frac{1}{c}\omega_N \cdot R$ の変化が $\frac{\pi}{2}$ より小さくなければならないだろう．よって，(64) と (69) とより音源と受音点との距離は

(73)　$$R < \sqrt{\frac{a_p}{64}} = R_c \qquad (\mathrm{m})$$

でなければならぬことが知られる．ここに a_p は (69) の a_N にすべて主壁面係数 α_p を用いた場合の値であり，**主吸音力** [18] という．この結果，(57) を積分形に置換したものが正しい値を示すためには音源と受音点の間の距離が (73) の R_c より近くなければならぬことが示される．しかして (73) が満足される場合には，(64) の dm_p と (46) とを用いて (57) の 8 個の因数を積分すると，受音点の音圧は

(74)　$$p = -i\omega\rho_0 \frac{Q_0}{4\pi R} e^{i(\omega/c)(R-ct)} \qquad (\mathrm{Pa})$$

と表わすことができる．

(74) に示された音場は点音源から自由空間に輻射される対称球面波である．すなわち，音源から室内に輻射される音波が，外向発散波の形で直接受音点まで伝達し得る範囲は (73) で示された限界以内であることを示している．よって，(74) で示される音場を**直射音場** [19] と呼ぶことにする．一方，音源と壁面との距離が (73) の R_c より小さくない限り 64 個の指数函数中の残余の因数を和の形から積分形に置換することができない．したがってこの部分が表わす音場ははっきりしたエネルギーの流動方向を持たず，かつ整然とした波動現象をも呈しない．よってこのような音場を**散乱音場** [20] と呼び，その性質は統計的方法によって研究されねばならない．

受音点と音源との拒機が遠くなると，直射音場は次第に弱くなって，ついに散乱音場のみとなる．この直射音場が認められなくなる限界が (73) の R_c で与えられる．また (63) を満足するような高音域では，散乱波がかなり一様に室内に分布し，かつ壁面の近くを除いてかなり等方性を有するようになる．しかしこのような状態になっても，矩形室内では斜波動と面平行波動および軸平行波動の区別が存在し，**非周期運動** [21] とはならない．したがって **SABINE** の考えたような完全な拡散状態にはならない．つまり定常状態に生ずる散乱音場は**多重周期運動** [22] であって，非周期運動ではないのである．

以上によって，吸音壁を有する矩形室内の定常状態音場の性質がかなり明瞭になったので，室内の 1 点の平均自乗音圧を与える形を示すと，一般形は (45) と (57) より

(18)　normal room absorption factor，垂直吸音力ともいう．
(19)　coherent wave
(20)　incoherent wave
(21)　ergodic motion
(22)　multiply periodic motion

(75)
$$\overline{|p|^2} = \frac{4\omega^2\rho_0^2c^4Q_0^2}{V^2}\left|\sum_N\left(\frac{1}{\varepsilon_N}\right)\frac{\phi_N(-\omega,x_0,y_0,z_0)\cdot\phi_N(-\omega,x,y,z)}{\omega^2-(\omega_N-ik_N)^2}\right|^2$$

と表わされる．

実際に有響室などで残響法による測定を行う場合には，なるべく個々の波動姿態の影響を平均化するために，音源および受音器をともに**室の隅**[23]に配置するか，あるいは回転腕木に取りつけて**空間平均**[24]を行うかのいずれかの方法を用いる．室の隅に音源か受音器を配置した場合には ϕ_N はほぼ $+1$ または -1 となるが，空間平均を行った場合には ϕ_N はほぼ ε_N となる．よって音源と受音器をそれぞれ隅に置くか，空間平均を行うかによって3通りの組合せが生じ，受音点の平均目源音圧は

(76)
$$\overline{|p|^2} = \frac{\omega^2\rho_0^2c^4Q_0^2}{2V^2}\sum_N\frac{E_N}{(\omega^2-\omega_N^2+k_N^2)^2+4\omega_N^2k_N^2},$$

$$E_N = \begin{cases} 1 & (\text{音源と受音器を共に空間平均す}), \\ \dfrac{1}{\varepsilon_N} & (\text{一方を空間平均し，他方を隅におく}), \\ \left(\dfrac{1}{\varepsilon_N}\right)^2 & (\text{両方を隅におく}) \end{cases}$$

と表わされる．ここで $\nu>\nu_N$ なる場合には和を積分に置換してもよく，また k_N の値は既に述べた所より求めることができる．なお ε_N は（46）にて定義されている．

級数和を積分に置換するときには，波動ベクトルの分布函数（7）より明らかなように，その微分 $\omega_N^2d\omega$，$\omega_Nd\omega$ および $d\omega$ を $\left[(\omega^2-\omega_N^2+k_N^2)+4\omega_N^2k_N^2\right]$ で除いたものを0から無限大まで積分しなければならない．k_N が強制角周波数 ω に比して小さい場合には，この積分はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4k_N}$，$\dfrac{\pi}{4\omega k_N}$ および $\dfrac{\pi}{4\omega^2k_N}$ となるので，積分を行った後に k_N などを適当な吸音力 a で置換すると，音源と受音器を共に空間平均した場合の散乱音場の自乗平均音圧は

(77)
$$\overline{|p|^2} = \frac{\omega^2\rho_0^2Q_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{a_p}\left(1-\frac{\pi Sc}{4V\omega}+\frac{\pi Lc^2}{8V\omega^2}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{xy}\frac{\pi cL_xL_y}{\omega Va_{txy}}\left(1-\frac{c}{\omega}\frac{L_x+L_y}{L_xL_y}\right)+\sum_z\frac{2\pi L_xc^2}{V_{ax}\omega^2}\right]$$

となる．この第一項は，SABINE の与えた定常状態音場 **8・2** の（17）の吸音力 αS を壁面の主吸音力 a_p に等しいと置いたものと同形となる．すなわち音源の音響出力は

(78)
$$\overline{W_0} = \frac{\omega^2\rho_0}{8\pi c}Q_0^2 \qquad (\mathrm{W})$$

であるから（77）の第一項は

(23) room corner
(24) space average

(79)　$$\overline{|p|^2} \approx \frac{4\rho_0 c}{a_p}\overline{W_0}$$

と表わされる．

壁が余り柔らかくない矩形室内にて音源と受音器に空間平均を行った場合の散乱音場の自乗平均音圧は

(80)　$$\overline{|p|^2} \approx \left(\frac{4\rho_0 c}{a_p}\overline{W_0}\right) B_x B_y B_z ,$$

$$B_x = 1 - \frac{1}{2\eta_x} + \frac{a_p}{\eta_x a_{tyz}} , \qquad (B_y \text{ と } B_z \text{ は } B_x \text{ と同様の形})$$

で与えられ，室の全吸音力が主吸音力に等しいと仮定した場合の **SABINE** の形式に補正係数 B_x 等が付加した形となる．このことは一様な壁面を有する矩形室内の定常状態音場は非周期運動状態にならないことを意味している．また，同じ室内にて音源か受音器かの一方を隅に置き，他方を空間平均した場合には

(81)　$$B_x = 2 - \frac{2}{\eta_x} + \frac{a_p}{\eta_x a_{tyz}} , \qquad (\text{等々})$$

となり，また両方を隅に置いた場合には

(82)　$$B_x = 4 - \frac{2}{\eta_x} + \frac{a_p}{\eta_x a_{tyz}} , \qquad (\text{等々})$$

と表わされる．

この結果を見ると，単純な矩形室内の定常状態の音場では **SABINE** の定義した吸音率を測定することはできないことが明らかとなる．室が十分大きく η_x が十分に大きい場合，または周波数が十分に高い場合で，かつどの壁面も特別に柔らかくない場合には，定常状態音場の測定によって主吸音力 a_p を求めることができるが，これより求めた主壁面係数は **SABINE** の吸音率とは一致しない．しかして実際の測定においては補正係数 B_x 等が 1 に等しくないので，測定された結果は主壁面係と接壁面係数とが任意の割合に混合したものの平均値となること，および両者が混合する割合は室の大きさと波長との比に関係することが明らかにされている．

定常状態伝送特性に現われる峰と谷の差は壁面の吸音力と関連している．比較的狭い周波数帯域内に現われる音圧の峰と谷との比を **Peak-Dip-Ratio** [25]と呼ぶ．$\nu < \nu_L$ なる低音域では個々の共振峰は孤立しているから，相隣る二つの峰の共鳴周波数を ω_N' および ω_{N+1}' とすると，(60) より二つの峰の間隔は

(83)　$$\Delta\omega = \omega_{N+1}' - \omega_N' \approx \frac{2\pi^2 c^3}{V\omega_N^2} \qquad (\text{rad/s})$$

と表わされる．よって谷が生ずる周波数をその中間の

(84)　$$\omega_d = \omega_N' + \frac{1}{2}\Delta\omega_N$$

(85)　Takeshi ITOW: "On the Peak-Dip-Ratio of the Steady State Transmission Characteristics in the Room-acoustics"　Proc. 4th Japan National Congress for App. Mech.,1954.

と仮定すると，$\omega_N{}'$ の近傍の Peak-Dip-Ratio r_{PD} は

(85)
$$\frac{1}{r_{PD}{}^2}=\frac{\left\|p^2(\omega_{N'}+\frac{1}{2}\Delta\omega_N)\right\|+\left\|p^2(\omega_{N+1}{}'-\frac{1}{2}\Delta\omega_N)\right\|}{\left\|p^2(\omega_N{}')\right\|}$$
$$=\frac{1}{2\left[1+\left(\frac{\Delta\omega_N}{2k_N}\right)^2\right]}+\frac{\left|\frac{\Lambda_N}{\Lambda_{N+1}}\right|\left|\frac{\phi_{N+1}(x_0)}{\phi_N(x_0)}\right|^2\left|\frac{\phi_{N+1}(x_0)}{\phi_N(x)}\right|^2}{2\left[\left(\frac{k_{N+1}}{k_N}\right)^2+\left(\frac{\Delta\omega_N}{2k_N}\right)^2\right]}$$

と表わされる．もしもの $\omega_N{}'$ と $\omega_{N+1}{}'$ の間の波動定数が大きな変化をしない場合には

(86)
$$r_{PD}{}^2(\omega_N{}')\approx 2\left[\frac{1+\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta\omega_N}{k_N}\right)^2}{1+\left(\frac{\Lambda_N}{\Lambda_{N+1}}\right)^2}\right]$$

と表わされ，$k_N\approx 10$, $\Delta\omega_N=60$ rad/s, $\Lambda_N\approx\Lambda_{N+1}$ 場合には $r_{PD}\approx 10$ dB となる．

個々の共振峰が分離しないような高音域 $\nu>\nu_H$ では，共鳴振動数はほとんど連続的に分布しているから，任意の強制角周波数 ω を励振すれば，必らず $\omega_M{}'$ なる共鳴振動周波数と一致すると見なされる．しかして ω なる強制角周波数によって生ずる音場のレベルは，$\omega_M{}'$ の前後に分布する各共鳴姿態の半値幅の影響を受けることになるが，$\omega_M{}'$ の近傍の共鳴姿態の半値幅は大略 $\frac{1}{2}k_M$ なる一定値に保たれているものとみなされるので，$\omega_M{}'$ なる強制角周波数によって励振される共鳴姿態は $\omega_M{}'-k_M$ から $\omega_M{}'+k_M$ までの間に分布している共鳴姿態の合成によって大略のレベルが定められると考えてよいであろう．さらに ϕ_N と Δ_N とを ω について緩慢に変化する函数と考え，かつ

(87)
$$\omega_N{}'=\omega_M{}'-\delta\omega$$

とおくと，任意の点の音圧の自乗平均値は

(88)
$$\overline{\left|p(\omega_M{}')\right|^2}=\frac{1}{2}\omega^2\rho_0^2c^4\left|Q_0\right|^2\cdot\frac{\left|\phi_M(x_0)\right|^2\cdot\left|\phi_M(x)\right|^2}{4\left|\Lambda_N\right|^2\omega_M{}'^2}\int_{-k_N}^{+k_N}\frac{d(\delta\omega)}{\delta\omega^2+\left(\frac{\omega_M k_M}{\omega_M{}'}\right)^2}$$
$$=\frac{\rho_0^2c^4\left|Q_0\right|^2}{4k_M^2\left|\Lambda_M\right|^2}\cdot\tan^{-1}\left[\frac{\omega_M^2-k_M^2}{\omega_M^2k_M^2}\right]\cdot\left|\phi_M(x_0,y_0,z_0)\right|^2\left|\phi_M(x,y,z)\right|^2$$

と表わされる．しかるに（28）は

(89)
$$\left|D_{nx}(x_1)\right|^2=\cos^2\left[\frac{\pi\mu_{nx}}{L_x}x+\Im m(\Phi_x)\right]+\mathrm{Sinh}^2\left[\frac{\pi\kappa_{nx}}{L_x}x-\Re e(\Phi_x)\right]$$

と表わされるから，$\omega=\omega_{M1}{}'$ で峰となり，$\omega=\omega_{M2}{}'$ で谷となるような場合には，P.D.R の平方は

(90)
$$r_{PD}{}^2(\omega_{M1}{}')=\frac{\left\|p^2(\omega_{M1}{}')\right\|}{\left\|p^2(\omega_{M2}{}')\right\|}$$
$$=\left(\frac{k_{M2}}{k_{M1}}\right)^2\left(\frac{\Lambda_{N2}}{\Lambda_{N1}}\right)^2\left[\frac{\cot^{-1}k_{N1}}{\cot^{-1}k_{N2}}\right]\cdot G(u_x)\cdot G(u_{x0})\cdot G(u_y)\cdot G(u_{y0})\cdot G(u_z)\cdot G(u_{z0})$$

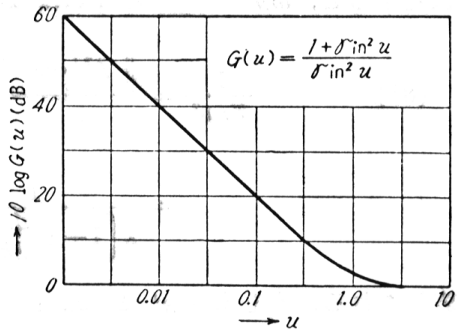
で与えられる．ここに

(91)
$$G(u)=\frac{1+\mathrm{Sinh}^2 u}{\mathrm{Sinh}^2 u},$$

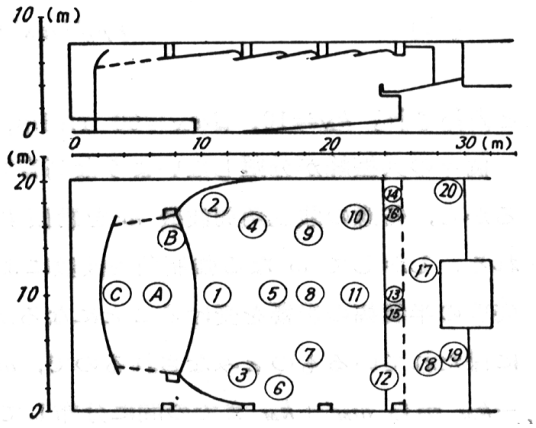
(92)
$$u_x=\frac{\pi\kappa_{nx}}{L_x}x-\Re e(\Phi_x)$$

である．　$G(u)$ の形は**第8・31図**に示してある．

定常状態の伝送特性を測定した例は**第8・24図**に示してある．**第8・32図**はあるホールの舞台上に反響板を装備した場合と除去した場合の伝送特性のオクターブバンドにわたっての平均値と Peak-Dip-Ratio および残響時間の実測値とを示したものである．**第8・33図**には**第8・19図**に示した大きな矩形室の伝送特性，　Peak-DiP-Ratio および残響特性の実測値を示しておく．



第8・31図



容積 2000（m^3），
一階席　426，
二階席　134．
A, B, C はスピーカー位置．
舞台上の点線は反響板．

8・3・8　矩形室内の過渡状態音場・残響波形

矩形室内の音場の定常状態特性が明らかになれば，過渡特性は演算子法を用いて定常状態の特性で表現することができる．矩形室内の1点 (x_0, y_0, z_0) に強さが $1e^{+i\omega t}$ なる点音源が存在する場合の受音点 (x, y, z) の定常状態の速度ポテンシャルは（54）と（45）とより

(93)
$$\Phi_S(\omega)=-c^2\sum_N\frac{\left(\frac{1}{\Lambda_N}\right)}{\omega^2-\Gamma_N^2(\omega)}\cdot\phi_N(\omega, x, y, z)\cdot\phi_N(\omega, x_0, y_0, z_0)e^{i\omega t},$$

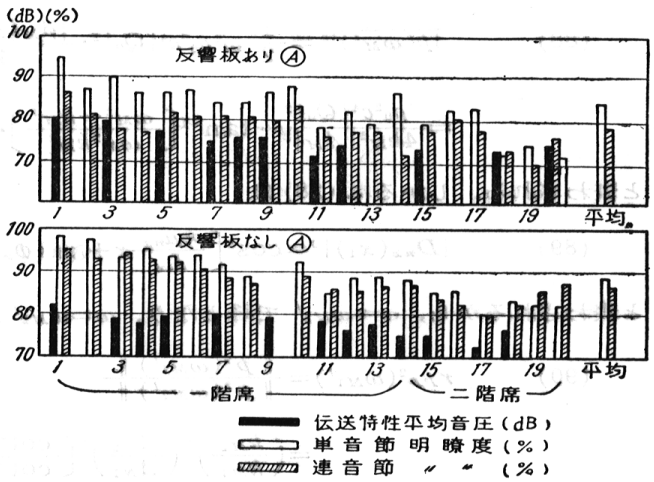
$$\Gamma_N(\pm\omega)=\omega_N\pm ik_N$$

と表わされる．しかして，受音点が音源に近い場合には，音場は直射波のみで表わすことができ，定常状態音場は（74）より

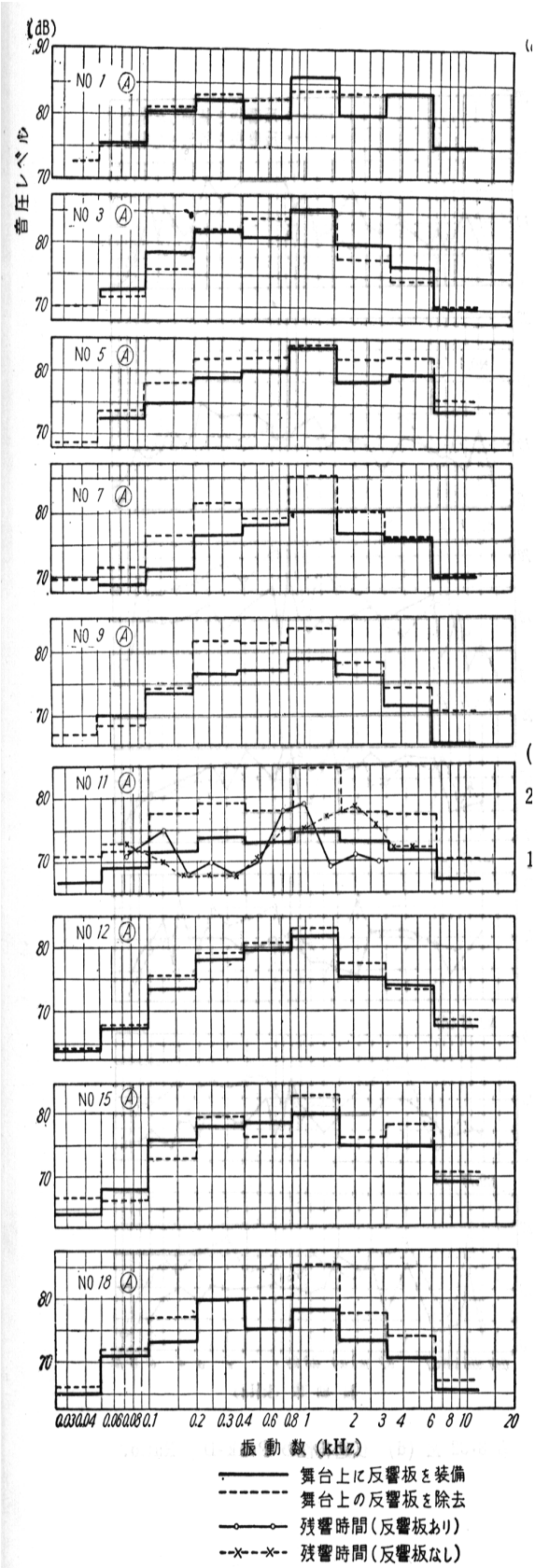
(94)
$$\Phi_s(\omega)\approx\Phi_c(\omega)=\frac{1}{4\pi R}e^{+i\omega\{t-(R/c)\}},$$

$$R<\sqrt{\frac{a_p}{64}}=R_c$$

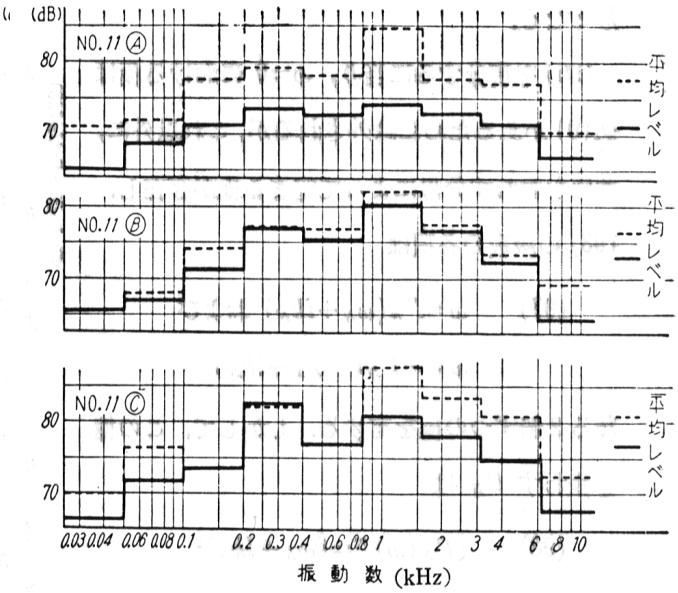
と表わされ，受音点と音源との距離　R が R_c より大きい場合には，音源は（93）の級数形で表わされる．



第8・32図（a）中型ホールの音響特性の例．



第8・32図（*b*）伝送特性のオクターブバンドの平均レベル（音源位置 *A*）.



第8・32図（*c*）伝送特性のオクターブバンドの平均レベル（音源位置変化）.

演算子法によれば，振動系に**単位段階衝撃波形**[1] の外力が加わった場合に，振動系が応動する過渡特性を表わす**インディシアルアドミタンス**[2] を用いて振動系の過渡現象の全般的性質を表現することができる．(x_0, y_0, z_0) にある音源が，$t<0$ の範囲では強さが零であり，$t>0$ の範囲は強さが1となったとすれば，任意の時刻の室内の音場のインディシアルアドミタンスは

$$A(t)=U(t)\cdot\Phi_s(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi_s(\omega)-\Phi_s(0)\right]\frac{d\omega}{\omega} \tag{95}$$

なる積分で表わされる．ここに

$$U(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ 1 & (t>0)\end{cases} \tag{96}$$

は HEAVISIDE の**単位段階函数**[3] であり，(95) の積分路は実軸のちょうど下側に存在する．また $\Phi_s(0)$ は $\omega=0$ なる単位音源によって生ずる室内音場の速度ポテンシャルであるが，$\omega=0$ の場合には大抵の壁面のインピーダンスは無根に大きくなるので剛壁と見なすことができ，これに対応する固有値や固有函数は非常に単純な

形となる．

（96）を積分するに当り，$\omega=0$ における極は $\Phi_s(0)$ があるために除外されるが，これ以外に，共鳴を表わす分母によって定まる極が存在し，（93）の級数の各項は

（97）　$\omega=\Gamma_N(\omega_N+ik_N)$　および

$$\omega=-\Gamma_N(-\omega_N+ik_N)$$

なる２個ずつの極を有する．しかして，この極を表わす Γ_N は

（98）

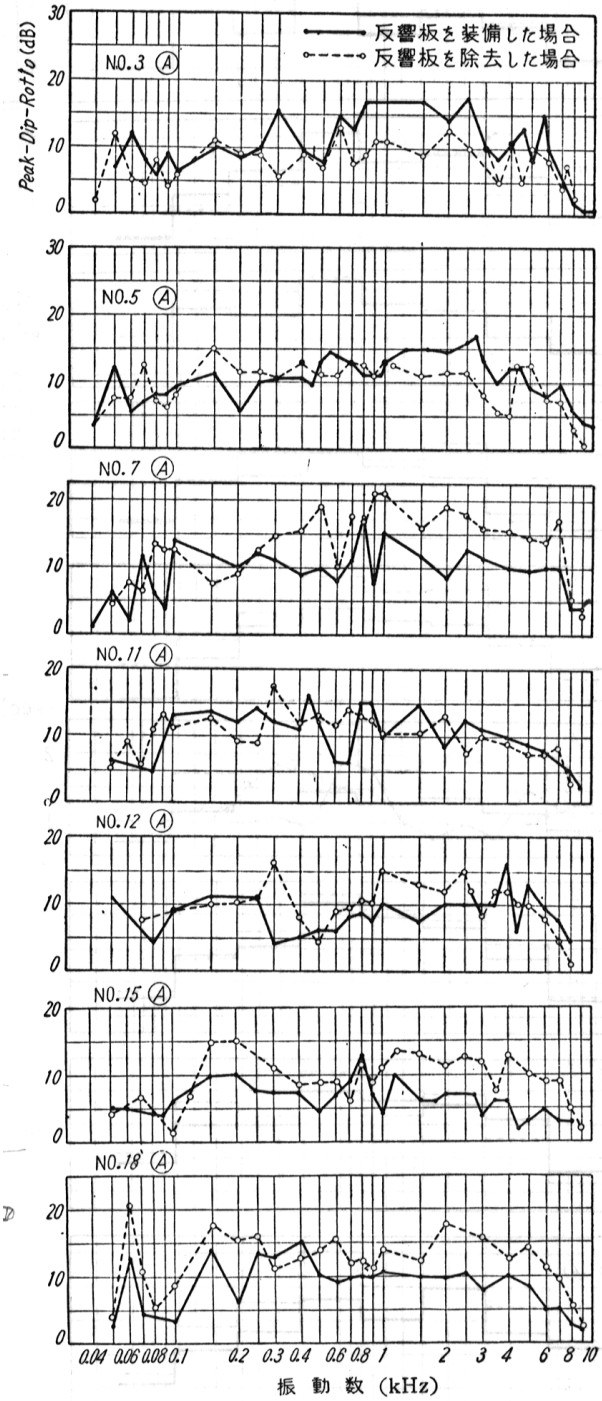
$$\left[\Gamma_N(\omega)\right]^2=\left[\omega_N+ik_N\right]^2$$

$$=(\pi c)^2\left[\frac{\chi_{nx}(\omega)}{L_x}+\frac{\chi_{ny}(\omega)}{L_y}+\frac{\chi_{nz}(\omega)}{L_z}\right]$$

を決定式（20）の ω の代りに代入することによって得られる自由振動の固有値であり，換言すれば（20）の η_x 等の代りに $(\Gamma_N L_x/\pi c)$ 等を用いて（20）を解いて得た解が（98）を満足するように χ_{nx} 等を定めることを意味する．よって，このようにして求められた解 $\Gamma_N(+\omega)$ の実数部を室の**第 N 次規準振動姿態の自由角周波数**[4]と呼び ω_{0N} と記し，その虚数部を**第 N 次規準振動姿態の自由減衰定数**[5]と呼び，k_{0N} と記すことにする．ここに注意すべきことは，過渡特性に現われる自由角周波数 ω_{0N} および自由減衰定数 k_{0N} は定常状態の定在波の共鳴角周波数 $\omega_N(\omega_N)$ およびその減衰定数 $k_N(\omega_N)$ とは異なる値を有することである．（93）の第 N 項の有する極を ω_{0N} と k_{0N} とで表わすと

（99）　$\omega_{0N}+ik_{0N}$　および　$-\omega_{0N}+ik_{0N}$

と表わせるからこれらの極に関する各項の留数



第8・32図（d）伝送特性の　Peak – Dip – Raito．

（1）　single pulse step function（前項脚注）
（2）　indicial admittance　（　〃　）
（3）　unity function　（　〃　）
（4）　the　natural frequency
（5）　the natural attenuation constant

を求めると，$t>0$ なる範囲のインディシアルアドミタンスは

(100)
$$A(t)=U(t)\cdot\Phi_s(0)-c^2\sum_N\frac{\Psi_N}{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}e^{-k_{0N}t}\cdot\cos(\omega_{0N}t+\psi_N-2\gamma_N),$$

ここに

(101)
$$\Gamma_N(\omega_N+ik_N)=\omega_{0N}+ik_{0N}=\sqrt{(\omega_{0N}^2+k_{0N}^2)}\cdot e^{i\gamma_N},$$
$$\frac{1}{\Lambda_N}\phi_N(\omega_{0N}+ik_N,x_0,y_0,z_0)\cdot\phi_N(\omega_{0N}+ik_N,x,y,z)=\Psi_N e^{i\phi_N}$$

と表わされ，この一般形は主として散乱音場も調べるのに用いられる．一方直射波を表わすインディシアルアドミタンスは単に

(102)
$$A_c(t)=\frac{1}{4\pi R}U\left(t-\frac{R}{c}\right)$$

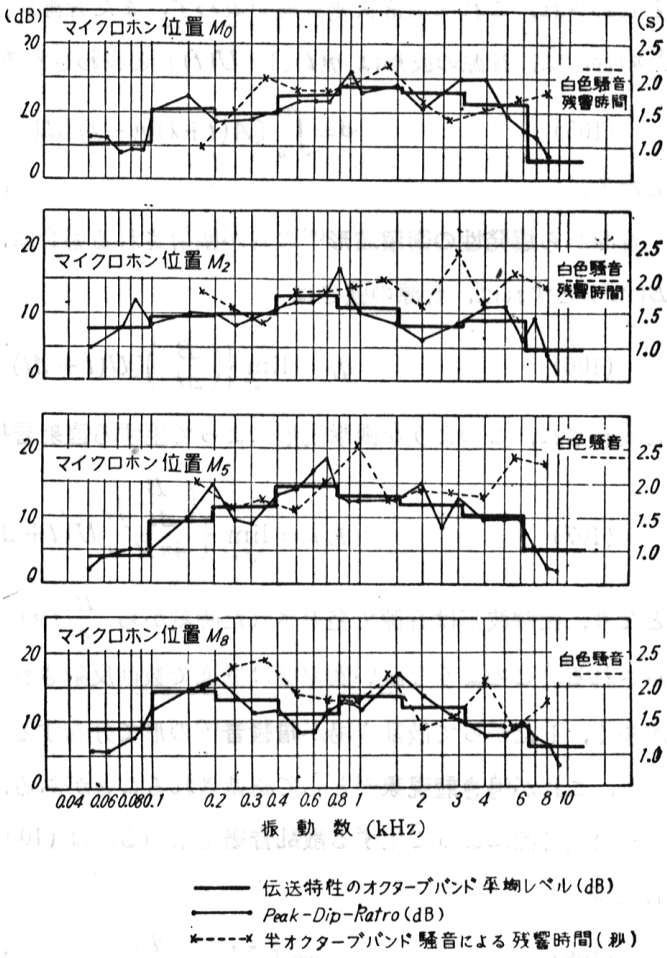
と表わされる．よって点 (x_0,y_0,z_0) に $q(t)$ $U(t)$ なる強さの音源が存在する場合の室内の一点の t なる時刻の速度ポテンシャルは

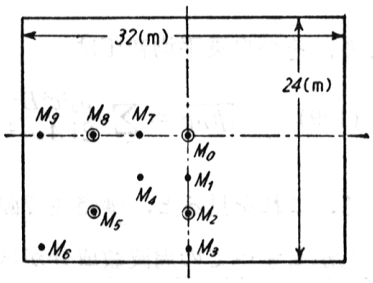
(103)
$$\Phi(x,y,z,t)=A(t)\cdot q(0)+\int_0^t A(t-\lambda)\cdot\dot{q}(\lambda)d\lambda$$

と表わされる．ここに $\dot{q}=\frac{d}{dt}[q(t)]$ であり，(103) は過渡特性ばかりでなく定常特性をも表わす一般形である．

音源から持続正弦波が輻射されている場合には，音源の発音し始めた時刻が遠い過去にあると見なされるので，t なる時刻の音場は

(104)
$$\phi_s(\omega)=\int_{-\infty}^t A(t-\lambda)\cdot\dot{q}(\lambda)d\lambda,$$
$$\frac{dq}{dt}=i\omega q$$





高さ　22 m，
容積　20 000 m³，
スピーカーの位置は，M_0 上 10 m に上向きに吊るす．
マイクロホンは床上 1.88 m．
壁面，天井は厚さ 1 吋の岩綿吸音板使用，
床面はタイル張り．
第8・33図　大きな短形室の伝送特性，P. D. R. および残響時間の実測値を示す．

と表わされ，これは定常状態音場を表わす．また音源が遠い過去に発音し始めて $t=0$ で急に停止した場合には，音源の波形は $q(t)\left[1-U(t)\right]$ と表わされるから，音源が停止した後の音場は

(105)
$$\phi=\int_0^\infty\left[A(t+\lambda)\dot{q}(-\lambda)\right]d\lambda-\left[q(0)\cdot A(t)\right]$$

となる．

音源から**爆発性の衝撃波形**[6]の音が輻射される場合には，Δt なる時間に噴出する空気の容積を $B(\mathrm{m}^3)$ とすれば，音源の強さは

(106)
$$q_P=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\left(\frac{B}{\Delta t}\right)\left[U(t+\Delta t)-U(t)\right]\right\}$$

と表わされ．このような衝撃波形によって生ずる**直射音場**は（102）より

(107)
$$\Phi_{cP}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{B}{\Delta t}\right)}{4\pi R}\left[U\left(t+\Delta t-\frac{R}{c}\right)-U\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\right\}$$

となり，衝撃波形は音源で発射された時刻から $\frac{R}{c}(\mathrm{s})$ 後に R なる距離の受音点に到達することが示される．このような鋭い衝撃音は壁面で数回反射されても，やはり直射音場の形を保っている場合が多く，したがって散乱音場が**暗騒音**[7]の形で分布する上に幾つかの衝撃性波頭面が直射音の形で重畳し，これが**鳴き龍現象**[8]として認識されることがある．

爆発性音源によって生ずる**散乱音場**を求めるには（100）の級数形を用いることが必要であり，散乱音場は

(108)
$$\Phi_P=c^2B\sum_N\frac{\Psi_N}{\sqrt{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}}\,e^{-k_{0N}t}\cdot\sin(\omega_{0N}t+\psi_N-\gamma_N)$$

となり，その自乗平均音圧は

(109)
$$\overline{\left|p_P\right|^2}=\sum_N\frac{\rho_0^2c^4B^2}{2\left|\Lambda_N\right|^2}\left|\phi_N(\omega_{0N}+ik_{0N},x_0,y_0,z_0)\cdot\phi_N(\omega_{0N}+ik_{0N},x,y,z)\right|^2\cdot e^{-2k_{0N}t}$$

となる．これを見ると，爆発性音源によって生ずる散乱音場はすべての固有振動を一様に含んでおり，しかもすべての周波数成分が散乱波に寄与する程度は同程度であることが示されている．したがって．減衰波形（の対数表示）は直線とならずに**屈折**[9]を生じ，減衰し始める部分の傾斜は高音部の比較的減衰の大きい周波数成分の影響によって定まる急な傾斜で減衰するが，終りの方は主として低音部の減衰の最もゆるやかな周波数成分の影響によってゆるやかに減衰する．しかして，最もゆるやかに減衰する波動姿態は室内の最も硬い対向壁面間に生ずる最低次の軸平行波動である場合が多い．

実際に衝撃音を発して残響波形を記録すると，（109）で与えられるような平滑な滅衰曲線とはなら

（6）　explosive pulse
（7）　back grouud noise
（8）　flutter echo，第8・55図 参照.
（9）　break

ずに第8・19図に示したように多数の凹凸を持った不規則な減衰曲線となることが多い．これは（109）で示すような散乱音場と壁面で何回か反射された衝撃性の直射音場とか重畳していることに起因する．

音源から持続正弦波を輻射し，室内音場が定常状態に達した後に音源を停止させた場合に生ずる残響波形を表わす過渡解は，音源位置 (x_0, y_0, z_0) にある $Q\sin(\omega t-\varphi)\left[1-U(t)\right]$ なる強さの音源によって受音点 (x, y, z) に生ずる音場を求めればよいから，（105）と（100）とより

（110）
$$\Phi=-c^2Q_0\cdot\sin\varphi\cdot\sum_N\left[\frac{\Psi_N}{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}e^{-k_{0N}t}\cdot\cos(\omega_{0N}t+\psi_N-2\gamma_N)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\omega c^2Q_0\sum_N\left[\frac{\psi_N}{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}e^{-k_{0N}t}\left\{\frac{\sin(\omega_{0N}t+\psi_N-2\gamma_N-\varphi-\Omega_N^{(-)})}{\sqrt{(\omega_{0N}-\omega)^2+k_{0N}^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sin(\omega_{0N}t+\psi_N-2\gamma_N+\varphi-\Omega_N^{(+)})}{\sqrt{(\omega_{0N}+\omega)^2+k_{0N}^2}}\right\}\right]$$

と表わされる．ここに

（111）
$$(\omega_{0N}\pm\omega)+ik_{0N}=\sqrt{(\omega_{0N}\pm\omega)^2+k_{0N}^2}\,e^{i\Omega_N^{(\pm)}}.$$

よって，これに対する音圧は

（112）
$$p=+\rho_0c^2Q_0\sin\varphi\cdot\sum_N\left[\frac{\Psi_N}{\sqrt{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}}e^{-k_{0N}t}\cdot\sin(\omega_{0N}t+\psi_N-\gamma_N)\right]$$
$$-\frac{\omega\rho_0c^2}{2}Q_0\sum_N\frac{\Psi_N}{\sqrt{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}}e^{-k_{0N}t}\left\{\frac{\cos(\omega_{0N}t+\psi_N-\gamma_N-\varphi-\Omega_N^{(-)})}{\sqrt{(\omega_{0N}-\omega)^2+k_{0N}^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(\omega_{0N}t+\psi_N-\gamma_N+\varphi-\Omega_N^{(+)})}{\sqrt{(\omega_{0N}+\omega)^2+k_{0N}^2}}\right\}$$

で与えられる．（112）の第一項は音源を突然に停止させたために生ずる衝撃性音圧で，**遮断衝撃音**[10]と呼ばれ，その大きさは音源を遮断する瞬間の位相 φ に関係している．

遮断衝撃音の生ずる機構を知るには，直射音場の形を求めてみるとよい．（105）と（102）を用いると，直射音場は

（113）
$$\Phi_c\approx\frac{Q_0}{4\pi R}\cdot\sin\left[\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)+\varphi\right]\cdot U\left(\frac{R}{c}-t\right)$$

となり，$\varphi=0$ または π でない限り（113）は $t-\dfrac{R}{c}$ で有限値から0へ不連続的に変化をする．したがって（113）の時間微分に比例する音圧は Φ_c が有限値から0に不連続変化をする瞬間に大きな衝撃波を発生する．

実際にスピーカーを音源に使用する場合には，振動板の振動速度が0（ $\varphi=0$ または π に相当）の瞬間に音を切らない限り，遮断衝撃音を生ずる．しかしてスピーカーの制動が十分に良好ならば，このような衝撃音は1個しか発生されないが，制動が不十分の場合にはスピーカーの固有振動数に相当

(10)　cut-off pulse

する過渡波形が重畳される．

音源に**震音**を用いたり一定の**帯域幅の雑音**を用いる場合の解は（112）を必要な周波数帯域にわたって重畳した形で表わすことができる．また（112）の自乗平均音圧の対数 $\log\overline{|p^2|}$ を**減衰曲線**[11] または**残響波形**と呼び，残響測定によって求めることができる．

残響波形を統計論的に取扱うためには，多数の波動姿態が同時に励振されていることが必要である．そのためには励振周波数 ν が（63）を満足する程度に十分高いか，または**震音の周波数帯域幅** $\Delta\nu$ がその平均周波数 ν に対して

（114）
$$\Delta\nu > \frac{50c^3}{V\nu^2}$$

なる関係を満足することが必要である．今多数の波動姿態が励振されたものとすると，（112）の遮断衝撃音を表わす第一項を除いた第二項から**散乱音場の自乗平均音圧**を求めることができ，（76）を求めた場合と同様の操作で

（115）
$$\overline{|p|^2} = \frac{\omega^2\rho_0^2c^4Q_0^2}{8V^2}\sum_N \frac{E_N}{\omega_{0N}^2+k_{0N}^2}e^{-2k_{0N}t}\left\{\frac{1}{(\omega_{0N}-\omega)^2+k_{0N}^2}+\frac{1}{(\omega_{0N}+\omega)^2+k_{0N}^2}\right\}$$

を得る．ただしこの級数はすべての斜波動，面平行波動および軸平行波動について加算せねばならない．しかして音源と受音点とについて空間平均を行い（77）に相当する形式を導くと

（116）
$$\begin{aligned}\overline{|p|^2} = \frac{\omega^2\rho_0^2c^4Q_0^2}{2\pi}\Bigg\{&\exp\left(-\frac{a_pc}{4V}t\right)\cdot\left(\frac{1}{a_p}\right)\left(1-\frac{\pi Sc}{4V\omega}+\frac{\pi Lc^2}{8V\omega^2}\right)\\&+\sum_{xy}\left[\exp\left(-\frac{a_{txy}c}{4V}t\right)\cdot\left(\frac{\pi cL_xL_y}{\omega Va_{txy}}\right)\left(1-\frac{c}{\omega}\frac{L_x+L_y}{L_xL_y}\right)\right]\\&+\sum_c\exp\left(-\frac{a_{ax}c}{4V}t\right)\cdot\left(\frac{2\pi c^2L_x}{\omega^2Va_{ax}}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

となる．さらに特別に柔らかい壁面が存在せず，かつ η 等が約3より大きい場合には，（80）に相当する近似式として

（117）
$$\overline{|p|^2} \approx \frac{4\rho_0c}{a_p}\overline{W}_0\cdot D_x(t)\cdot D_y(t)\cdot D_z(t),$$
$$\begin{aligned}D_x(t)=&\left(1-\frac{1}{2\eta_x}\right)\cdot\exp\left\{-\frac{(\alpha_p^{(-x)}+\alpha_p^{(+x)})cL_yL_z}{4V}t\right\}\\&+\left(\frac{a_pv}{\eta_xa_{tyz}}\right)\cdot\exp\left\{-\frac{(\alpha_t^{(-x)}+\alpha_t^{(+x)})cL_yL_z}{4V}t\right\}\end{aligned}$$

を得る．ここに $\alpha_p^{(-x)}$ は $-x$ 壁面の主壁面係数，$\alpha_t^{(-x)}$ は $-x$ 壁面の綾壁面係，

（118）
$$v=\begin{cases}1, & (\text{音源と受音器を共に空間平均}),\\ \dfrac{1}{2}, & (\text{一方を空間平均し，他方を隅におく}),\\ \dfrac{1}{4}, & (\text{両方を隅におく})\end{cases}$$

(11)　decay curve

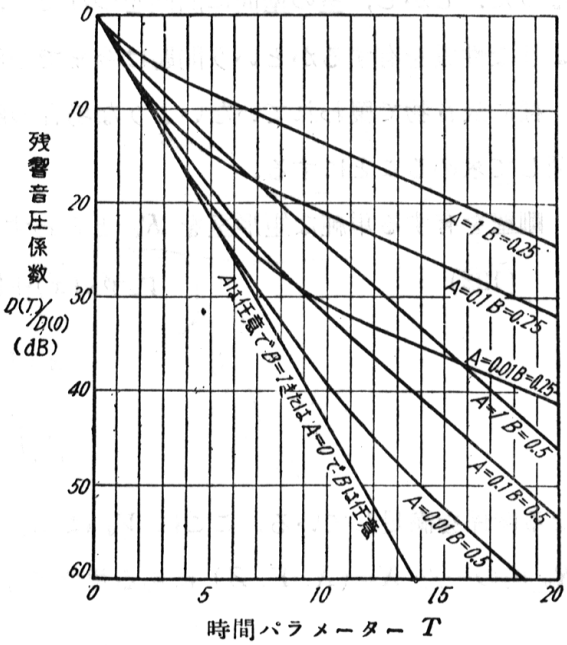
である．（115）～（117）より $\log\left|\overline{p^2}\right|$ を求めて時間を横軸として描けば**理論的残響波形**が得られる．（117）にて

（119）
$$D_x(T)=\left(1-\frac{1}{2\eta_x}\right)\left[e^{-T_x}+A_x e^{-B_x T_x}\right],$$
$$T_x=(\alpha_p^{(-x)}+\alpha_p^{(+x)})\,L_y L_x\,\frac{c}{4V}\,t\,,$$

（時間パラメーター）

$$A_x=\frac{a_p}{a_{tyz}}\left(\frac{2}{2\eta_x-1}\right),$$
$$B_x=\frac{\alpha_t^{(-x)}+\alpha_t^{(+x)}}{\alpha_p^{(-x)}+\alpha_p^{(+x)}}\,,$$
$$\eta_x=\frac{2L_x}{\lambda}$$

とおいて $20\log\left[D_x(T)/D_x(0)\right]$ と T_x の関係を A_x と B_x をパラメーターとして図示すると**第8・34図**に示すような理論的残響波形が示される．



第8・34図　短形室の理論的残響波形．(MORSE)

残響波形に**屈折を生ずる時刻**は（117）の第一頃と第二項の大きさが等しくなる時刻である．よって屈折の生ずる時刻は

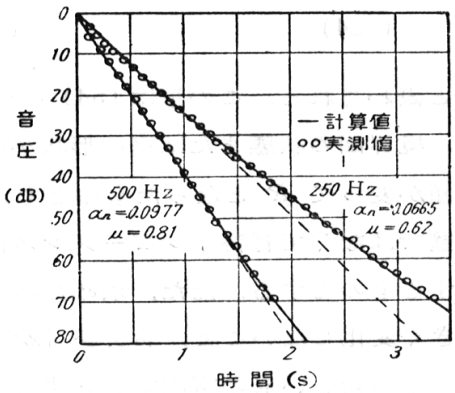
（120）
$$t_b^{(x)}=\frac{4L_x}{c}\,\frac{1}{(\alpha_p^{(-x)}+\alpha_p^{(+x)}-\alpha_t^{(-x)}-\alpha_t^{(+x)}}\ln\left[\frac{a_{tyz}}{a_p v}\left(\eta_x-\frac{1}{2}\right)\right]\qquad(\mathrm{s})$$

で与えられ，またこのときのレベルは $t=0$ のときレベルから大略

（121）
$$\frac{10\,a_p}{L_y L_z}\,\frac{1}{(\alpha_p^{(-x)}+\alpha_p^{(+x)}-\alpha_t^{(-x)}-\alpha_t^{(+x)})}\cdot\log_{10}\left(\frac{\eta_x a_{tyz}}{v a_p}\right)\qquad(\mathrm{dB})$$

だけ低下した所である．

第8・34図に示した残響波形の理論値を実測に利用すると，壁面の音響インピーダンスと残響波形との相関関数を追究する手がかりとなる．**第8・35図**は（119）と同様の理論式を用いて実測値と対比した例である．[12]



大きさ 14′×20′ (4.27×6.1＝26.1 m²)，厚さ 1/2′ のセロテックスを床面上に配置した例．

第8・35図　理論的残響波形と実測値との対比．

8・3・4 室の形状および吸音物質の配置の影響

一様な壁面を有する矩形室内の定常状態および過渡状態の音場はいままでの解析で明らかとなったが，ここまでの範囲では**SABINE**の考えたような非周期連動は

(12)　F.V.HUNT.L.L.BERANEK and D.Y.MAA: "Analysis of sound Decay in Rectangular Rooms " J.A.S.A.,Vol.11, p.80, 1939.

成立しないことが明らかとなり，したがって**SABINE**の定義した吸音率は測定できないことも明瞭となった．しかし，室の壁面に凹凸をつけたり，吸音物質を不規則に壁面に装着した場合に音場がどのような性質を有するかという問題は今までの解析の結果からは推測できない．よって矩形室の壁面が一様に吸音物で覆われていないような場合の解を**接動法**[(1)]によって一様な壁面を有する解の級数で展開して求めることにする．

剛壁を有する単純な短形室を R_0 と表わすと，R_0 内の固有函数 $\phi_n(x)$ は正確に定められ

(122)
$$\nabla_x^2\phi_N(x)+\left(\frac{\omega_{0N}}{c}\right)^2\phi_N(x)=0,$$
$$x=(x,y,z),\qquad N=(n_x,n_y,n_z),\qquad \omega_{0N}=2\pi\nu_N=\frac{2\pi c}{\lambda},$$
$$\iiint_{R_0}\phi_N(x)\cdot\phi_M(x)\,dV_x=V_0\varepsilon_N^0\delta_{NM}$$

なる関係を満足している．ここに V_0 は R_0 なる室の容積，ε_N^0 は ϕ_N^2 の R_0 内の平均値である．R_0 内の一点 $X=(X,Y,Z)$ にある単位音源から $\nu=\omega/2\pi$ (Hz) の音を発する場合の解 G は

(123)
$$\nabla_x^2G(x,X)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2G(x,X)=\delta(x-X),$$
$$\nabla_X^2G(x,X)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2G(x,X)=\delta(x-X)$$

を満足する．ここに $\delta(x-X)$ は三次元の DIRAC の**デルタ函数**[(2)]である．(122) の G は **GREEN** の函数がであり，ϕ_N 等と同じ境界条件 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}=0\right)$ を満足するから，G を ϕ_N の級数で展開することができ

(124)
$$G_\omega(x,X)=\sum_N\frac{c^2}{V_0\varepsilon_N^0}\frac{\phi_N(x)\cdot\phi_N(X)}{(\omega^2-\omega_N^2)}$$

と表わされる．この形は（54）と（56）にて壁の吸音が無いものと仮定した場合と同じ形である．

境界面の状態または室の形状が僅かに変化した場合の固有函数を求めるために，室の形が R_0 から僅か変って R となったものと考える．R は到る所 R_0 より内側に変位するものとし，かつ壁面は剛壁ではなくて音響インピーダンス密度 Z^A なる材料で覆われ，インピーダンスは場所によっても変化するものとする．ただ，求めた結果を表わす級数の収斂性を良好にするために R は R_0 から余り大きく変化しないこと，および $|Z^A|$ は ρ_0c に比して十分大きいという条件を付加しておく．

この新い形の室内で成立する音場を φ と記すと，新しい壁面上の境界条件は

(125)
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=i\omega\rho_0\frac{\varphi}{Z^A}=i\frac{\omega}{c}\beta\varphi=\frac{\omega}{c}(\sigma+i\gamma)\varphi$$

と表わされ，**GREEN** の定理によって

---

(1)　perturbation theory
SLATER and FRANK: "Introduction to Theoretical Physics"　McGraw-Hill, 1933, 参照.

(2)　delta function,　$\delta_{NM}=\begin{cases}1, & (N=M),\\ 0, & (N\neq M).\end{cases}$　　$\delta(x-X)=\begin{cases}1, & (x=X),\\ 0, & (x\neq X).\end{cases}$

(126)
$$\varphi(x)=\iint_S\left[\varphi(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_\omega(x,X)-G_\omega(x,X)\frac{\partial}{\partial n_X}\varphi(X)\right]dS_X$$

と書かれる．ここに S は新い室 R の壁表面である．(126) の解の φ は R の内部では波動方程式 $\nabla^2\varphi+(\omega/c)^2\varphi=0$ を満足し，R の外では $\varphi=0$ となる（ R の外で R_0 の内側でも $\varphi=0$ ）．また

(127)
$$\Phi_N(x)=\iint_S\left[(\phi_N(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_{\omega N}(x,X)-G_{\omega N}(x,X)\frac{\partial}{\partial n_X}\phi_N(X)\right]dS_X$$

で定義される函数 Φ_N は R の内では ϕ_N に等しくなり，R の外では 0 となる．また (125) が成立する場合に

(128)
$$\varphi(x)=\iint_S\varphi(X)\left[\frac{\partial}{\partial n_X}G_\omega(x,X)-i\left(\frac{\omega\beta}{c}\right)G_\omega(x,X)\right]dS_X$$

の解はほとんど大抵の ω に対して 0 となり，ただ $\omega=\Gamma_N$ なる特定の値に対してのみ $\varphi(x)$ が R の内部で 0 以外の値を有することが示される．よって (128) を満足する $\varphi_N(x)$ が R なる室内の固有函数であり，Γ_N がその固有値であるということができる．

室 R が複雑な形をしたり，壁面の定数が場所によって複雑に変化する場合には，(125) を解いて正確な解を見出すことはできないが，新しい境界条件の下に新しい壁面の上に積分を行うために摂動法を適用すれば，(128) の積分の中の $\varphi(X)$ を剛壁の矩形室の波動函数 $\phi_N(X)$ で置換し，G を (124) で置換することによって第一近似解を求めることができる．さらに GREEN の定理を用いて

(129)
$$\Gamma_N^2=\omega_N^2+\frac{c^2\left[\iint_S\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial n}\phi_N-i\left(\frac{\omega\beta}{c}\right)\phi_N\right\}dS\right.}{\iiint_R\varphi\cdot\phi_N\,dV}$$

とすれば，これより固有値 Γ_N の近似値が求められる．しかし，(128) の積分の中の $\varphi(X)$ を ϕ_N で置換することは，S 上の φ の不連続性のために級数の収斂を遅くする欠点を生ずる．よってこの不連続を除去するために (127) を用いて

(130)
$$\varphi(x)=\Phi_N(x)+\iint_S\left\{\varphi(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_\omega(x,X)-\phi_N(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_{\omega N}(x,X)\right.$$
$$\left.-G_\omega(x,X)\left(i\frac{\omega\beta}{c}\right)\varphi(X)+G_{\omega N}(x,X)\frac{\partial}{\partial n_X}\phi_N(X)\right\}dS_X$$

とし，(130) の積分の中の φ を ϕ_N で置換するとかなり収斂のよい結果が得られ，

(131)
$$\varphi(x)\approx\Phi_N-\iint_S G_{\omega N}(x,X)\cdot\left[\frac{i\omega\beta}{c}\phi_N(X)-\frac{\partial}{\partial n_X}\phi_N(X)\right]dS_X$$

となる．ここでさらに (124) を用いると

(132)
$$\varphi(x)\approx\Phi_N(x)+c^2\sum_M{}'A_{MN}\frac{\phi_M(x)}{\omega_N^2-\omega_M^2},$$
$$A_{MN}=\frac{1}{V\varepsilon_M}\iint_S\phi_M\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_N-i\frac{\omega_N\beta}{c}\phi_N\right)dS,$$

$$V\varepsilon_N = \iiint_R \phi_N^2 dV$$

と表わされる．ここに Φ_N は R の内側では ϕ_N に等しく，R の外では0であり，V は R の容積，$\varepsilon_{\backslash n}$ は（46）に示すような R 内の ϕ_N の自乗平均値，$\sum'$ は $M=N$ の場合を除いて加算することを示している．（132）に対応する固有値の近似値は（129）と（132）とから

（133）
$$\Gamma_N^2 \approx \omega_N^2 + c^2 A_{NN} + c^4 \sum_M{}' \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_N} \cdot \frac{A_{MN}^2}{\omega_N^2 - \omega_M^2}$$

と表わされる．

この結果は一般的なものであるが，室の形が R_0 に保たれたままで，壁面の一部に吸音材料が配置されているような簡単な場合には境界条件（125）だけを摂動すればよいから，（132）および（133）の A_{MN} は

（134）
$$A_{MN} = \frac{-i\omega_N}{cV_0\varepsilon_M^0} \iint_S \left[\phi_M \beta \phi_N\right] dS$$

と表わされる．[3] これより固有値の第一近似を求めると

（135）
$$\Gamma_N(-\omega) \approx \omega_N - \frac{1}{2}\frac{c}{V_0\varepsilon_N^0} \iint_S (\sigma + i\gamma)\phi_N^2 dS$$

となり，音場の時間的変化の形は

（136）
$$e^{-i\Gamma_N t} \approx \exp\left[-i\left\{\omega_N - \frac{c}{2V_0\varepsilon_M^0}\iint \sigma\phi_N^2 dS\right\}t - \frac{ct}{2V_0\varepsilon_N^0}\iint \gamma\phi_N^2 dS\right]$$

と表わされる．よって φ の自乗平均値の減衰波形は

（137）
$$\exp(-ca_N t/4V_0)$$

の形となり，室の**実効壁面係数**は

（138）
$$\alpha_N = \frac{a_N}{S} \approx \frac{8}{2S\varepsilon_N^0}\iint \gamma\phi_N^2 dS\,,$$
$$\gamma = \Re e\left(\frac{\rho_0 c}{Z^A}\right)$$

と表わされる．この壁面係数は壁面の所々に吸音材を分散して配置した場合にも適用することができる点が定常状態音場から求めたものと異なっている．

この第一近似の結果を見ると，吸音機構に関する興味ある事項が明らかにされている．その第一は，大きな吸音力を生じさせるためには，大部分の波動函数が極大値を取るような壁面上に吸音片を配置するのが最も有効であること，したがって矩形室の中で最も有効な場所は隅であり，その次に有効な

（3）　D.Y.MAA: "Non-uniform Acoustical Boundaries in Rectaogular Rooms" J.A.S.A., Vol. 12, p.39, 1940.
H.FESHBACH and A.M.CLOGSTON: " Perturbation of Boundary Conditions" Phys.Rev., Vol.59, p.189, 1941； Phys.Rev.,Vol.65, p.307, 1944.

場所は室の稜線に沿う位置である．第二に，吸音材を所々に分散させる場合には，なるべく不規則に分散するように配置した方が有効である．吸音材を整然と配置すると，必然的にある姿態の ϕ^2 が極小となる位置に配置することになり，その結果，その姿態の制動が悪くなる場合がある．

壁面の状態がい一様である部分の面積が波長に比して大きい場合には，実効壁面係数（138）はさらに簡単な形となる．すなわち（138）の積分は一定値 β と面積 S の積にその壁面上の ϕ_N の自乗平均値を乗じたものにほぼ等しくなる．よって波長に比して大きな寸法の一様な吸音材料が壁面に装着されている場合の壁面係数の第一近似値は

（139）　$$\alpha_N \approx 8\gamma e_N$$

と表わされる．ここに e_N は（38）と（46）に示した**波動姿態係教**であって，

（140）　$$e_N = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{吸音壁面上の}\ \phi_N^2\ \text{の平均値}}{\text{室全体の}\ \phi_N^2\ \text{の平均値}}\right]$$

と表わされる．なお（139）は室の最も長い辺の長さを L とするとき，

（141）　$$\left|Z^A\right| > \frac{4\rho_0 cL}{\lambda}$$

の範囲で成立する．この結果を見ると，この程度の不規則性では音場は未だ非周期性を持つようにはならず，したがって壁面係数は壁面の音響インピーダンスだけでなく波動姿態の影響を受ける．よって **SABINE** の考えたような状態は実現せず，したがって壁面係数 α_N は SABINE の吸音係数とは一致しないことが示される．しかしこの結果を用いると，ある周波数帯の室の残響波形の初めの部分の傾斜をなるべく急峻にしたい場合には，その周波数帯に関係する大部分の波動姿態の波動姿態係数 e_n が大きな値を持つような壁面に吸音物質を配置すればよく，またその終りの傾斜をなるべく大きくしたい場合には**8・3・3**で述べた特定の姿態に対して e_n が小さくなるような壁面上に吸昔物質を置かないようにすればよいことが知られる．

このような目的には，種々の室に対する e_N が既知であることが望ましい．矩形室に対して MORSE は次のような値を示している．

斜波動:

すべての壁面に対して　$e_N = 1$,

面平行波動:

空気の運動方向と平行な 1 対の壁面に対して　$e_N = \frac{1}{2}$,

残りの壁面に対して　$e_N = 1$,

軸平行波動:

空気の運動方向に平行な 4 面に対して　$e_n = \frac{1}{2}$,

他の壁面に対して　$e_n = 1$.

また床と天井とが平行平面を形成し，壁がこれと垂直をなし，床の平面図形が任意の形をしている室

にて，床か天井のいずれかに大きな面積の吸音材料を配置した場合には，この平行平面と直交する軸を x とすると

$$e_N = e_{nx} = \begin{cases} 1, & (\text{平行壁面に入射する斜波動}, \quad n_x > 0) \\ \dfrac{1}{2}, & (\text{平行壁面に平行な波動}, \quad n_x = 0) \end{cases}$$

である．なお三角形の室および円筒形壁面を有する壁に対する波動姿態係数をも MORSE が示している．

摂動法による第二近似項が第一近似項に比して省略できるのは壁面のインピーダンス密度と室の最長辺の長さとの間に（141）の関係が成立する範囲だけであって，一般の場合には第二近似項を無視することができない．このような，第二近似項の省略ができない場合の音場の性質を知るための簡単な例として，室の形が一定 R_0 に保たれたままで，壁面の一部に一片の吸音物質が配置された場合について，摂動法を用いて第二近似項までを求めて見よう．壁面の吸音物質の影響だけによって摂動された波動函数は（132）と（134）とより

（142）
$$\varphi(x) \approx \Phi_N(x) - i\omega \frac{c}{V} \Sigma' \left[\iint \phi_M(X) \cdot \beta(X) \cdot \phi_N(X)\, dS_X \right] \frac{\phi_M(x)}{\varepsilon_M(\omega_N^2 - \omega_M^2)}$$

と表わされる．ここに $X(X, Y, Z)$ は吸音物質上の点，$x(x, y, z)$ は室内の任意の点を表わし，Σ' は $M = N$ の場合を除外して加算することを示している．今壁面上の一点 X と室内の任意の一点 x との間の距離を D と表わすと，吸音物質の近傍における（142）の荒い近似値は，（124）と前記の直射音場の概念を用いて

（143）
$$\varphi(x) \approx \Phi_N(x) + i\omega_N \rho_0 \iint \frac{\phi_N(X)}{Z^A(X)} \cdot \frac{1}{2\pi D} e^{i(\omega_N/c)D} dS_X$$

と表わされる．ただし積分は x の近傍の吸音物の表面上で行われる．

（143）の第二項は，壁面上の音圧の第一近似値が $-i\omega_N \rho_0 \phi_N(X)$ であるときの壁面上の速度の法線成分が $-i\omega_N \rho_0 \phi_N(X)/Z^A(X)$ と表わされることから，壁面の dS_X なる部分がこの速度で振動して $(-i\omega_N \rho_0 \phi_N / Z^A) dS_X$ なる強さの点音源を構成すると考え，X 点から D だけ離れた点の音場を求め，れを吸音物壁面に積分したものを表わしている．よって壁面に置かれた吸音物質が室内の波動函数 ϕ_N に及ぼす第一の影響は，定在波 ϕ_N 自身が吸音物質（あるいはその穴の中の空気）を運動させることによって再輻射される音場による波動函数の修正の形で表われる．

（142）に対応する固有値は

（144）
$$\Gamma_N^2 \approx \omega_N^2 - i\omega_N \frac{c}{V\varepsilon_N} \iint \beta \phi_N^2 dS + \left(\frac{\omega_N c}{V\varepsilon_N} \right)^2 \sum_M{}' \left(\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_M} \right) \frac{\left[\iint \phi_M \beta \phi_N dS \right]^2}{\omega_M^2 - \omega_N^2}$$

と表わさせるが，摂動された音場の直射部分のみを考えた場合には大略

（145）
$$\Gamma_N^2 \approx \omega_N^2 - i\omega_N \frac{c}{V\varepsilon_N} \iint \beta \phi_N^2 dS$$

$$+\left(\frac{\omega_N}{V\varepsilon_N}\right)^2 \iint dS_X \left\{\phi_N(x)\cdot\beta(x)\cdot\iint \phi_N(X)\cdot\beta(X)\frac{e^{i(\omega_N/c)D}}{2\pi D}dS_X\right\}$$

と表わされる．ここに面積分を行う範囲は D の小さい範囲のみに限定する．

壁面の吸音物の存在によって摂動された音場（142）および（144）の第二近似項の重要な因数は

(146)　$$\beta_{MN}=\iint \phi_M \beta \phi_N dS$$

の形で表わされる**相互変換積分**[4]である．この頃は，吸音物が第 N 次波動姿態を第 M 次波動姿態に変換して散乱輻射する能力を表わす項であるから，もしもこの頃が大きな値を有する場合には第二近似頃が第一近似項と同程度またはそれ以上となり，純粋な軸平行波動や面平行波動は存在しなくなり，かつ多数の波動姿態が**乱雑に混合した状態**[5]となって，減衰曲線はすべての姿態に共通な１本の直線で表わされるようになる．したがって β_{MN} の大きい状態は**SABINE** の考えた拡散音場に近い状態を表わし，したがって音場が，非周期状態へ移行する可能性のあることを示している．

矩形室の**壁面が一様である場合**には相互変換作用が生じない．たとえば xy 面上の比音響アドミタンス β が一様の場合には，相互変換積分 β_{MN} は $n_x=m_x$，でかつ $n_y=m_y$ の場合を除いてすべて 0 となる．したがって摂動音場の第二近似項の大部分の項は 0 となり，多数の波動姿態の乱雑な混合状態は生じない．同様の結果が吸音材の**対称的配置**の場合にも生じ，このような場合にも β_{MN} はほとんど 0 となる．

比音響アドミタンス $\beta=\rho_0 c/Z^A$ なる吸音物質を辺の長さ a および b なる矩形にしたもの m 個を，矩形室の壁面上に不規則に配置した場合の摂動項を求めてみよう．吸音物の全面積は $S_a=mab(\mathrm{m}^2)$ であるから，（144）の第一近似項は

(147)　$$-2i\omega_N c\frac{\beta S_a}{V}$$

となる．第二近似項を求めるには，１個の吸音物についての相互変換積分 β_{MN} の自乗平均値を M と N とについて平均したものを求めねばならない．吸音物が壁面に不規則に配置されている場合には，定在波の節面が吸音物上を通るか通らないかは全く任意であるから，β_{MN} の x に関する項は

(148)　$$\beta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{\pi n_x}{L_x}x+\Phi_x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m_x}{L_x}x+\Phi_x'\right)dx$$

なる一般形で表わされる．よって，（148）の自乗をまず Φ_x および Φ_x' について平均し，次いで n_x と m_x について平均する．位相 Φ_x と Φ_x' について 0 から 2π までの間の自乗平均を求めると

(149)　$$\frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{2L_x}(n_x-m_x)\right]}{\left[\frac{\pi}{L_x}(n_x-m_x)\right]^2}+\frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{2L_x}(n_x+m_x)\right]}{\left[\frac{\pi}{L_x}(n_x+m_x)\right]^2}$$

---

(4)　interaction integral
(5)　random mixture

を得るから，これに対応する y の項を求めてその積を n_x, m_x, n_y および m_y について平均すると，一片の吸音物について近似的に

(150)
$$\frac{1}{4}\beta^2 \frac{a^2b^2}{1+\dfrac{4ab}{\lambda_{MN}^2}}$$

を得る．よって m 個の吸音物についての相互変換積分の自乗平均値は

(151)
$$\left\|\beta_{MN}^2\right\| = \frac{1}{4}\beta^2 \frac{S_a^2}{1+\dfrac{4S_a}{m\lambda_{MN}^2}}$$

となる．ここに λ_{MN} は $M \approx N$ なる場合の第 N 姿態と第 M 姿態の波長の平均値を示している．これを用いて（144）の第二近似の代表的な項を求めると

(152)
$$\frac{\omega_N c^2}{V}\beta^2 \frac{S_a^2}{1+\dfrac{4S_a}{m\lambda_{MN}^2}} \cdot \frac{1}{\omega_M - \omega_N}$$

と表わされる．一方固有角周波数 ω_N の周波数間隔の平均値は（7）より近似的に $\dfrac{2\pi^2c^3}{\omega^2 V}$ と表わされるから，（144）の第二近似項の内の大きな値を有する項の和は大略

(153)
$$\frac{\omega^3}{4\pi^2 cV}\left|\beta\right|^2 \frac{S_a^2}{1+\dfrac{4S_a}{m\lambda_{MN}^2}}$$

と表わされる．

音場が非周期状態に接近するかどうかを判定するには第二近似項（153）と第一近似項（147）との大きさの比を用いるのが都合かよい，よって

(154)
$$\Xi_a = \frac{\omega^2}{8\pi^2c^2}\frac{\left|\beta\right|S_a}{1+\dfrac{4S_a}{m\lambda^2}} = \frac{1}{2}\frac{\left|\beta\right|S_a}{\lambda^2+\dfrac{4S_a}{m}}$$

を矩形室内に吸音物を不規則に配置した場合の波動の**乱雑姿態指数**[6]と定義する．乱雑姿態指数 Ξ_a が1より小さい範囲では波動姿態は非周期状態とならず，したがって，波動姿態の相違によって減衰曲線の傾斜に相違を生じ，減衰曲線は直線にならない．しかし，Ξ_a が1よりある程度大きい状態になると純粋の面平行波動および軸平行波動は存在しなくなり，各姿態の減衰率はある平均値に接近するので SABINE の考えた拡散状態に近づくことが期待できる．しかし完全な拡散状態となるには Ξ_a がどの程度まで大きくなればよいかということは未だ明確でない．

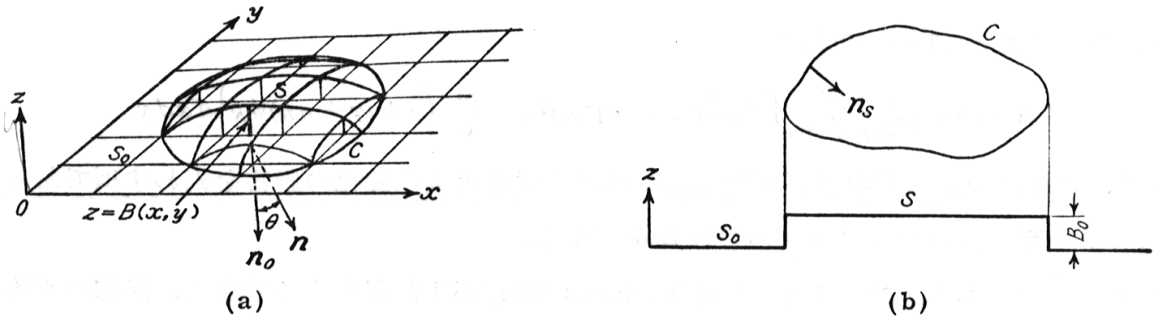
低周波域では，波長 λ が大きいので Ξ_a は1よりかなり小さい．普通の柔らかい吸音物質は，$\left|\beta\right| = 0.2$ 程度であるから，λ^2 が $\dfrac{4S_a}{m}$ より小さくなるような高音域でも，吸音材の片数 m をかなり多くしないと Ξ_a を1より大きくすることはできない．したがって，Ξ_a を大き＜するためには多数の小片を配置することが必要となる．各吸音片の大きさが $\dfrac{\lambda}{2}$ の場合には $\lambda^2 \approx \dfrac{4S_a}{m}$ となり，

(6)　index of randomness

(155)　$$\Xi_a \approx \frac{m}{8}|\beta|, \quad \left(a=b=\frac{\lambda}{2}\right)$$

と表わされる．この場合が Ξ_a を大きくするのに最も有効な状態である．

次に室の形状が変化した場合の音場を第二近似まで求める例として，壁面に**隆起**[7]が存在する場合を扱って見よう．**第8・36図**に示すように，$-z$ 壁面（ xy 面）上の閉曲線 C で囲まれた部分が室の



第 8・36 図

内部（ $+z$ 方向）に向って隆起しているものとし，この隆起した曲面が

(156)　$$z=B(x,y), \quad (B\geq 0)$$

と表わされるものとする． xy 壁平面を S_0 ，その外向法線を n_0とし，隆起した曲面を S ，その外向法線を n と表わし，n と n_0 とのなす角を $\theta(x,y)$とする．ここに n_0 は $-z$ 方向（室から外に向う方向）を向く．このような条件の下では，(132) の A_{MN} の各項は

(157)　$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_N=\left[n\cdot\nabla\phi_N\right]_S=\left\{-\left[\frac{\partial\phi_N}{\partial z}\right]_S+\nabla_{S0}B\cdot\nabla_S\phi_N\right\}\cos\theta$$

となる．ここに ∇_{S0} は xy 平面上の二次元の空間微分を表わし，かつ

(158)　$$\cos^2\theta=1+\nabla_{S0}B\cdot\nabla_{S0}B$$

である．しかして曲面 S 上の微小面積は

(159)　$$dS=\frac{dxdy}{\cos\theta}$$

であるから， A_{MN} の第一項は

(160)　$$(A_{MN})_1=\frac{1}{V\varepsilon_M}\left\{\iint_S\phi_M\nabla B\cdot\nabla\phi_N dxdy-\iint_S\phi_M\frac{\partial}{\partial z}\phi_N dxdy\right\}$$

と表わされる．ただし $B<\frac{\lambda}{4}$ の場合には $\nabla_S\phi_N$ の代りに $\nabla_{S0}\phi_N$ を用いてもよい．

一方， S_0 は平面であるから，この面の近くの波動函数は一般に

(161)　$$\phi_N=F(x,y)\cdot\cos\frac{\pi n_z}{L_z}z$$

と表わされ，また $z=B$ の位置では $B\ll(L_z/\pi n_z)$ の範囲では

(7)　bulgu または bump

(162)
$$-\left[\frac{\partial}{\partial z}\phi_N\right]_{z=B} \approx \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 B\left[\phi_N\right]_{z=0}, \qquad \left(B \ll \frac{L_z}{\pi n_z}\right)$$

と表わされる．よって，ここに示す隆起の比音響アドミタンスを $\gamma - i\sigma$ とし，かつ $\frac{\partial}{\partial z}\phi_N$ をそれと等価なサセプタンスで置換して

(163)
$$\sigma_B = -\frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 B$$

と表わすと，隆起による A_{MN} の値は

(164)
$$A_{MN} \approx \frac{1}{V\varepsilon_M}\int_{S0}\int \phi_M\left\{\nabla_{S0}B\cdot\nabla_{S0}\phi_N - \frac{\omega}{c}(\sigma + i\gamma + \sigma_B)\phi_N\right\}dxdy$$

と表わされる．ここに σ_B は室の形が変化したために生ずる容積の変化の影響を表わす項であって，B が正である限り質量性のサセプタンスの性質を有する．

矩形室の xy 壁面だけに，波長に比して大きい面積の隆起が１個存在する場合に，隆起の平均の高さを $\bar{B}$ とすると，(164) の第二項（ σ_B を含む項）に隆起が及ぼす影響は，斜波動 $(n_z > 0)$ の場合に

(165)
$$2\frac{\bar{B}}{L_z}\left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 \qquad (n_z > 0)$$

と表わされる．よって隆起が固有値に及ぼす影響の第一近似値は

(166)
$$\Gamma_N^2 = c^2\left[\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2\right] + c^2\left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2\frac{2\bar{B}}{L_z}$$

と表わされ，z 方向の室の長さが $\bar{B}$ だけ変化したための影響が現われる．よって σ_B で表わされる室の形の変化の影響は壁面の音響インピーダンスの変化と同じ効果を生ずる．

(163) の第一項（ $\nabla_{S0}\cdot\phi_N$ を含む項）の影響を調べるために，隆起の形が**第8・36図（b）**のように閉曲線 C の所で段をなして０から B_0 まで隆起し，隆起した部分の高さが一様に B_0 である場合の A_{MN} を求めると

(167)
$$A_{MN} \approx \frac{1}{V\varepsilon_M}\left\{B_0\int_C \phi_M n_S\cdot\nabla_{S0}\phi_N dS - \frac{\omega}{c}\iint \phi_M(\sigma + i\gamma + \sigma_B)\phi_N dxdy\right\}$$

と表わされる．ここに n_S は $\bar{B}$ 面内にある閉曲線 xy の外向法線 C である．(167) の第一項は隆起の周辺 C に沿う線積分であり，隆起の周辺によって音波が散乱される大きさを表わす項であり，この項によって周辺が音場を散乱させるのに非常に有効であることが示される． x 軸と y 軸とに平行した辺の長さがそれぞれ a, b である矩形の隆起が在る場合に，直射音場の概念を用いて (164) の A_{MN} の第一項の自乗平均値の平方眼 (9) を求めると，室の辺の長さに比して十分に小さい１個の**矩形隆起**に対して

(168)
$$\left[\frac{1}{V\varepsilon_M}\iint_{S_0}\phi_M\nabla_{S0}B\cdot\nabla_{S0}\phi_N dxdy\right]_{\text{r.m.s.}} \approx \frac{B_0}{2V}\frac{(a+b)\lambda}{\sqrt{1+\frac{4(a+b)}{\lambda}}}$$

---

(8)　閉曲線 C の内部は室の壁面の外であるから，外向法線は閉曲線の内方を向く．
(9)　root mean square value

となる．またもしも，y 軸に平行で a なる幅の**帯状隆起** $(b=L_y)$ が存在する場合には

(169)
$$\left[\frac{1}{V\varepsilon_M}\iint_{S0}\phi_M\nabla_{S0}B\cdot\nabla_{S0}\phi_N\,dx\,dy\right]_{\mathrm{r.m.s.}}=\begin{cases}\dfrac{B_0}{2V}\dfrac{\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4a}{\lambda}}}, & \begin{pmatrix}m_y=n_y\\ m_z=n_z\end{pmatrix}\\ 0, & \begin{pmatrix}m_y\neq n_y\\ m_z\neq n_z\end{pmatrix}\end{cases}$$

となる．この結果を見ると，帯状隆起を用いて A_{MN} のすべての項を 0 とならぬようにするためには，各壁面上に多数の帯状隆起を設け，その中の少なくも 1 個の隆起が 3 座標軸のいずれかと直交するようにするか，または互に直交する 3 壁面上に多数の吸音体片を分布させるかせねばならぬことが明らかとなる．しかして，十分に多数の吸音体片を十分不規則に分布する場合には（132）の A_{MN} の級数は収斂しなくなり，非周期運動状態が実現することになる．

（132）にて，波動函数 ϕ_M の係数は

$$\frac{c^2A_{MN}}{\omega_N^2-\omega_M^2}$$

と表わされるが，もしもこの係数が ω_M の近傍の ω_M なる角周波数にて小さい値を有する場合には，音場 φ は主として摂動されない波動函数 ϕ_N の級数で構成されることになるから，もしも ϕ_N が軸平行波動となる場合には φ の減衰率は ϕ_N の姿態によってかなりの相異を生ずるであろう．これに対して ϕ_M の係数が ω_M の近傍の ω_M なる角周波数にて小さくない場合には，φ は ω_M の近傍に存在する多数の摂動されない波動函数 ϕ によって構成されることになるので斜波動や平行波動が乱雑に混合した波動姿態となり，任意の角周波数 ω_M で成立する定在波姿態の減衰率がすべて，ほぼ同じ程度の値になるであろう．よって壁面に平均の比音響アドミタンス β，平均の面積 S_a/m なる m 個の吸音体片が不規則に分布し，かつ平均の高さ B なる n 個の隆起が不規則に分布している場合に，室内音場が非周期状態へ移行するか否かを判定する規準を求めてみよう．隆起が孤立している場合にはその周辺の長さの半分を a とし，帯状の場合にはその幅を a と表わし，かつ吸音体片の辺長と隆起の高さとがともに波長と同程度であるものとすると，（132）の固有函数 ϕ_M の係数 $c^2A_{MN}/(\omega_N^2-\omega_M^2)$ に対する荒い近似値として

(170)
$$\Xi_a\approx\frac{1}{10\lambda^2}\left[nBa+\left|\beta_e\right|S_a\right]\qquad\begin{pmatrix}a^2\approx\lambda^2\\ \dfrac{S_a}{m}\approx\lambda^2\end{pmatrix}$$

を得る．ここに

(171)
$$\beta_e=\gamma-i\sigma-i\sigma_B\approx\gamma-i\sigma+i\frac{2\pi B}{\lambda},\qquad\left(B<\frac{\lambda}{2}\right).$$

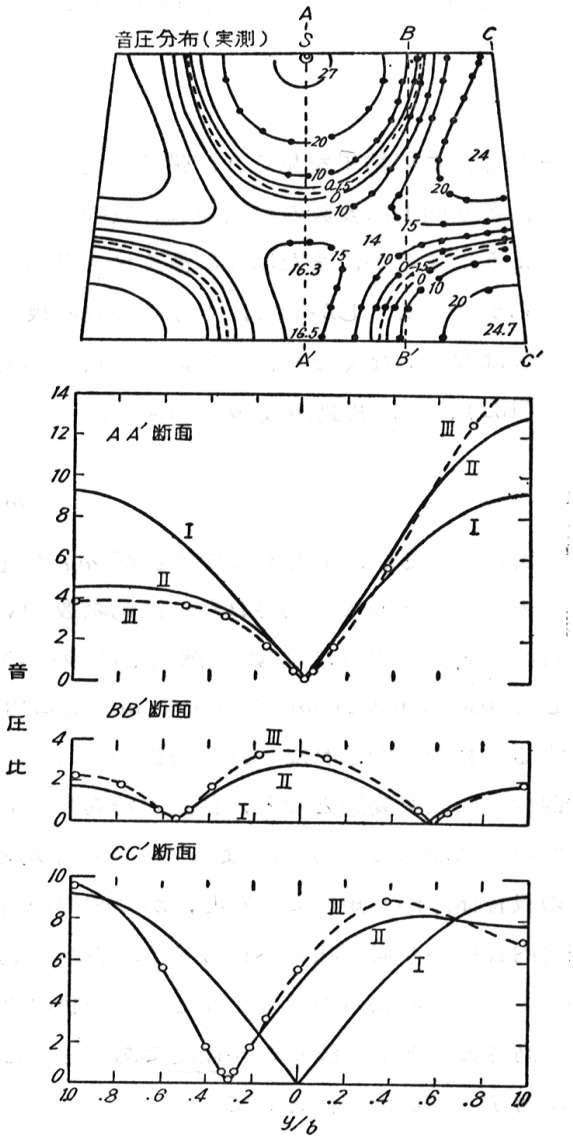
また吸音体片と隆起とが不規則に配置されている場合に，任意の波長に対して成立する形として

(172)
$$\Xi_\alpha \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{nBa}{X(\lambda+4a)}+\frac{|\beta_e|S_a}{\lambda^2+\dfrac{4S_a}{m}}\right\},\qquad \left(B<\frac{\lambda}{2}\right)$$

を得るが，この結果の近似度は（170）と同程度である．もしも　$B>\dfrac{\lambda}{2}$　の場合には上記の結果にて $\dfrac{\lambda}{2}$ と B とを交換すればよい．

ここに示した Ξ は（154）に示した**乱雑姿態指数**に相当し，吸音体片と隆起とがともに存在する場合に非周期状態が成立するか否かの目安をつけるのに便利な指数である．乱雑姿態指数が１より小さい場合には波動姿態は非周期運動状態とはならないが，１よりかなり大きい場合には非周期状態が成立し，減衰曲線は直線状となり，波動姿態に無関係に壁材料だけで定まる**SABINE**の吸音率を適用することのできる状態となる．

乱雑姿態指数 Ξ_α を表わす（170）には室の容積が直接に関係していない．しかし小さい室には，大きな室の場合ほど十分の数の吸音片や隆起を不規則に分布させることができないから，結局，小さい室では非周期状態が実現し難いことを意味している．同様の理由で，同じ大きさの室では短い波長の音ほど非周期状態に移行しやすいことになる．このようなことから実際の室に対して，波長と同程度の吸音片と隆起とを不規則に配置して非周期状態を実現させるためには，かなり多数（約100個程度）の吸音片と隆起とを必要とすることになる．普通の大きさの矩形室では　1 kHz　程度以上の振動数帯域で非周期状態を成立させることができても，これより低い帯域では非周期状態の実現は困難となる場合が多い．したがって，非常に大きい室でなければ可聴周波の全帯域にわたって非周期状態を成立させることは困難である．



第2．1次波動姿態，$\nu_{21}=1\,721$ Hz，
S は音源の位置．
Ⅰ　摂動前の音圧分布，
Ⅱ　摂動（第二近似）された音圧分布，
Ⅲ　実測された音圧分布．
第8・37図　正方形をわずか梯形に変形した室内の音圧分布の例．

室の形が矩形からわずか梯形に変化した場合の室内の音圧分布について，実測値と摂動法による理論値とを比較した例を**第8・37図**に示しておく．これによって第二近似項まで取った摂動法がかなり満足なものであることが実証されている．また乱雑姿態指数

によって表わされる壁面隆起の音波散乱現象は，古くから建築音響技術に採用されていたもので，円筒状隆起による散乱現象は殊によく利用されている．

残響時間の等しい2室が必らずしも同じような音響特性を持っていないことが以前から指摘されていて，このような性質を漠然と表わすのに室の**有響度**[10]という語が用いられている．これは，ある場合には音を保持する能力を意味し，またある場合には音を分散させる能力を表わしている．

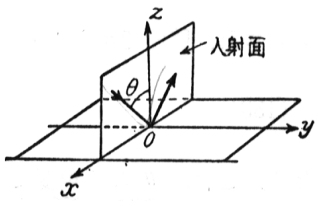
8・8・5　自由進行平面波による乱雑姿態音場の表現・SABINE の吸音率

壁面の形や壁面上の吸音片の配置を十分不規則にすることによって，ある振動数以上の帯域で非周期運動が成立する場合には，各定在波姿態は伝播方向の異なる多数の平面進行波の合成で表わすことができ，その姿態の腹や節は不規則に分布するが，その姿態を構成する多数の成分波の減衰率はほぼ等しい値を持つようになる．このような場合に初めて，壁面の任意の点にあらゆる方向から音波が入射するようになり，したがって，室の形や波動姿態に無関係に，材料のみで定まる吸音率の概念を用いることができるようになる．このような非周期状態の場合には，すべての方向に伝播する平面波成分の合成によって音場を構成することができるようになるので，取扱いはかえって簡単になる．

SABINE の吸音率と壁面の音響インピーダンスとの関係を知るために，最初は一様な比音響インピーダンス

(173)
$$Z^A = R - iX = \rho_0 c\zeta = \frac{\rho_0 c}{\beta} = |Z^A| e^{-i\varphi} \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

を有する平面壁による平面進行波の反射の問題から解いてみよう．**第8・38図**に不すように，壁面と垂直な座標軸を z とし，壁面と音波の入射面とに平行な座標軸を x とし，音波の入射角を θ とすると，速度ポテンシャルは



第8・38図

(174)
$$\phi = e^{i(\omega/c)(x\sin\theta - z\cos\theta - ct)} + Ae^{i(\omega/c)(x\sin\theta + z\cos\theta - ct)},$$

ここに A は壁面における速度ポテンシャルの反射係数を表わす捜索数である．壁面上の音圧は

(175)
$$p_s = -i\omega\rho_0(1+A)e^{i(\omega/c)(x\sin\theta - ct)} \qquad (\mathrm{Pa}),$$

壁面上の粒子速度の法線成分は

(176)
$$\dot{\xi}_{zs} = -i\omega\frac{\cos\theta}{c}(1-A)e^{i(\omega/c)(x\sin\theta - ct)} \qquad (\mathrm{ms})$$

であるから $p_s/\dot{\xi}_{zs} = Z^A$ とおくと

(177)
$$A = \frac{\zeta\cos\theta - 1}{\zeta\cos\theta + 1} = \frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta} = e^{-2\pi\gamma(\theta)} = e^{-2\pi\tau + 2\pi i\nu},$$

ただし

(178)
$$\mathrm{Coth}\left[\pi\gamma(\theta)\right] = \mathrm{Coth}\left[\pi(\tau - i\nu)\right] = \zeta\cos\theta = \frac{|Z^A|\cos\theta}{\rho_0 c}\cdot e^{-i\varphi},$$
$$\mathrm{Tanh}\left[\pi\gamma(\theta)\right] = \beta\sec\theta$$

(10)　liveness，**8・2・2**参照．

と表わされ，$e^{-2\pi\tau}$ は反射の際に生ずる減衰を示し，$2\pi\nu$ は反射の際に生ずる位相変化を表わしている．

入射波の強さが $1(\mathrm{W/m^2})$ なる場合には

(179)
$$\frac{|p_i|^2}{2\rho_0 c}=1 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

であるから，壁面上の音圧の大きさは

(180)
$$|p_s|=\sqrt{2\rho_0 c}\,(1+A)=\sqrt{2\rho_0 c}\,\frac{2\zeta\cos\theta}{\zeta\cos\theta+1}=\sqrt{2\rho_0 c}\,\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\beta}$$
$$=\sqrt{8\rho_0 c}\,e^{-\pi\gamma}\,\mathrm{Coth}(\pi\gamma) \qquad (\mathrm{Pa})$$

壁面上の粒子速度の z 成分の大きさは

(181)
$$|\dot{\xi}_{zs}|=\sqrt{\frac{2}{\rho_0 c}}\,(1-A)\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{\rho_0 c}}\,\frac{2\cos\theta}{\zeta\cos\theta+1}=\sqrt{\frac{2}{\rho_0 c}}\,\frac{2\beta\cos\theta}{\cos\theta+\beta}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{\rho_0 c}}\,e^{-\pi\gamma}\,\mathrm{Sinh}(\pi\gamma) \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．剛壁の場合には $\beta=0$，$\gamma=0$ であるから $|p_s|=2|p_i|$，$|\dot{\xi}_{zs}|=0$ であり，壁面が柔らかく $|\beta|>0$ なる場合には一般に $|p_s|$ が減少し $|\dot{\xi}_{zs}|$ が増加する．

反対波の強さは

(182)
$$|A|^2=\frac{|p_r|^2}{2\rho_0 c}=\frac{(\cos\theta-\gamma)^2+\sigma^2}{(\cos\theta+\gamma)^2+\sigma^2}=e^{-4\pi\tau},$$
$$\beta=\gamma-i\sigma$$

と表わされ，壁面でエネルギーが吸収される割合は

(183)
$$\alpha(\theta)=1-|A|^2=1-e^{4\pi\tau}=\frac{4\gamma\cos\theta}{(\cos\theta+\gamma)^2+\sigma^2}$$

となる．これは θ なる角度で入射した平面波の壁面係数であり，

(184)
$$\frac{|Z^A|\cos\theta}{\rho_0 c}=1$$

となるような入射角にて $\alpha(\theta)$ は極大値をとる．したがって硬い壁の場合には $\theta=90^\circ$（面平行波動）の近くで最大吸音が生ずることになる．

SABINE の吸音率を求めるために，θ なる方向の単位面積を貫いて入射するエネルギー流について求めた $\alpha(\theta)$ をすべての入射角について平均すると，

(185)
$$\alpha_{\mathrm{stat}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta=8\gamma\int_0^1\frac{x^2dx}{x^2+2\gamma x+\gamma^2+\sigma^2}$$
$$=8\gamma\left\{1-\gamma\ln\left[1+\frac{2\gamma+1}{|\beta|^2}\right]+\frac{\gamma^2-\sigma^2}{\sigma}\tan^{-1}\left[\frac{\sigma}{|\beta|^2+\gamma}\right]\right\}$$
$$=8\frac{\cos\varphi}{|\zeta|}\left\{1-\frac{\cos\varphi}{|\zeta|}\ln(1+2|\zeta|\cos\varphi+|\zeta|^2)\right.$$
$$\left.+\frac{\cos2\varphi}{|\zeta|\sin\varphi}\tan^{-1}\left[\frac{|\zeta|\tan\varphi}{|\zeta|+\sec\varphi}\right]\right\}$$

$$\underset{|\zeta|\to\infty}{\Rightarrow} 8\frac{\cos\varphi}{|\zeta|}\left[1-\frac{2\cos\varphi}{|\zeta|}\ln|\zeta|+\frac{\varphi}{|\zeta|}\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}\right]$$

$$\underset{|\zeta|\to 0}{\Rightarrow} \frac{8}{3}|\zeta|\cos\varphi\left[1-\frac{3}{2}|\zeta|\cos\varphi\right],$$

ただし

$$|\zeta|=\frac{|Z^A|}{\rho_0 c},\qquad \gamma=\frac{\cos\varphi}{|\zeta|},\qquad |\zeta|\cos\varphi=\frac{R}{\rho_0 c},\qquad |\zeta|\sin\varphi=\frac{X}{\rho_0 c}$$

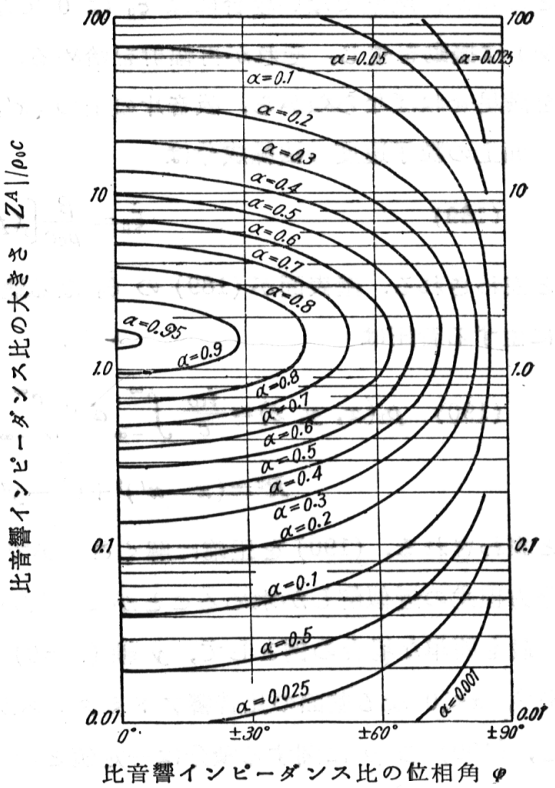
と表わされる．

（185）に示された **SABINE** の吸音率 α_{stat} と比音響インピーダンス比 $|\zeta|e^{i\varphi}$ との関係は**第8・39図**に示されている．この吸音率は波動姿態が乱雑に混合した状態の残響室において始めて測定できるものであって，通常の小さな残響測定室では約 2 kHz 以上の周波数帯でないと α_{stat} を求めることができない．低周波域で測定される吸音率は主として

（186）　$$\alpha_p=\frac{8\cos\varphi}{|\zeta|}=8\gamma$$

なる主壁面係数の場合が多い．一方，大きな講堂の中では，乱雑に混合した状態が普通の可聴周波帯で成立するので，大きな講堂などの音響設計を行う場合には（少なくも 2 kHz 以下に対して）残響室で測定された吸音率よりもむしろ（185）または第8・39図から求めた吸音率を用いた方が実際に近いことになる．なお通常は，主壁面係数 α_p は **SABINE** の吸音率 α_{stat} よりも大きな値となっている．

この吸音率 α_{stat} を用いれば古典理論（14）から制動係数が決定でき，また S なる面積の吸音片の吸音力は $\alpha_{stat}S$ と表わされる．しかし吸音片の周辺で生ずる音場の散乱による影響は α_{stat} には含まれていない．乱雑な混合状態にある室内に配置された吸音片の**周辺効果の補正**[(1)]を行うと **SABINE** の残響式はさらに正確なものとなる．周辺効果の補正は吸音片の周辺の長さに比例した量だけ吸音片の実効面積が増加した形で表わされ，かつ室の稜線から $\frac{\lambda}{2}$ 以内にある吸音片の周辺は補正の必要のないとが示される．このことは，一つの壁面全体に一様に張られた吸音体は周辺効果の補正をする必要が



第8・39図　SABINE の吸引率 α_{stat} と比音響インピーダンス比との関係を示す図表（非周期運動状態が成立する場合にのみ使用できる）．

（1）　edge correction, 乱雑に混合した状態でなければこの補正は適用できない．

なく，壁面の平坦な部分に**自由周辺**[2]を有する吸音片に対してのみ補正を行えばよいことを意味する．

吸音片の周辺で生ずる音波の散乱が吸音に変換される機構を明らかにするために，簡単な例として強さ1なる平面進行波が $-z$ 壁面（ xy 平面）に垂直に入射する場合の散乱音場を求めてみよう．壁面の $x>0$ の範囲は音響インピーダンス密度 $Z^{A(+)}$， $x<0$ の範囲は $Z^{A(-)}$ なる物質で覆われ， $x=0$ に境界線があるものとする． xy 面のインピーダンス密度が無限大（剛壁）の場合には，室内の音圧は

(187)
$$p_0=\sqrt{2\rho_0 c}\,(e^{-i(\omega/c)z}+e^{+i(\omega/c)z})\,e^{-i\omega t}$$
$$=2\sqrt{2\rho_0 c}\,\cos\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cdot e^{-i\omega t},$$

壁面上の粒子速度の法線成分は

(188)
$$\dot{\xi}_0=\frac{i}{\omega\rho_0}\left[\frac{\partial p_0}{\partial z}\right]_{z=0}=0$$

となるが，剛壁でない場合には $\dot{\xi}_0$ は0でなくなり，壁面（もしくは少なくも壁材料の穴の中の空気）は振動を生じ，それが再輻射を始める．壁面の再幅射音圧を p_1 とすると，(p_0+p_1) は境界条件を満足せねばならぬから，吸音片の上の (x',y') 点の比音響アドミタンスを $\beta(x',y')$ とすると，壁面上の粒子速度の法線成分は

(189)
$$\dot{\xi}_0=\frac{\beta}{\rho_0 c}\left[(p_0+p_1)\right]_{z=0}$$

と表わされる．壁表面が（189）の $\dot{\xi}_0$ なる速度で振動する場合に，これより R だけ離れた点 (x,y,z) に生ずる音圧は

(190)
$$p_1(x,y,z)=\frac{i\omega}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\left[\frac{\beta(x',y')}{2\pi R}e^{i(\omega/c)R}\left\{p_0(x',y',0)+p_1(x',y',0)\right\}\right],$$
$$R=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2$$

と表わされる．（190）を正確に解くことができれば再輻射音場の精密解が得られるが，通常はこの積分方程式の近似解しか求めることができない．

最も簡単な場合の例として， y 軸 $(x=0)$ を境界線として $x>0$ なる壁面の比音響アドミタンスが $\beta^{(+)}$， $x<0$ なる壁面の比音響アドミタンスが $\beta^{(-)}$ なる一様な材料で覆われている場合を扱ってみると，（190）の y に関する積分は一定値となるので，壁面 $(z=0)$ 上の散乱波は

(191)
$$p_1(x)=-\frac{\omega}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(x')\left[p_0(x')+p_1(x')\right]\left\{\mathrm{J}_0\left(\frac{\omega}{c}\left[x-x'\right]\right)+i\mathrm{N}_0\left(\frac{\omega}{c}\left[x-x'\right]\right)\right\}dx'$$

と表わされる．しかるに，壁面上 $(z=0)$ の入射波は x に無関係に $2\sqrt{2\rho_0 c}\,e^{-i\omega t}$ と表わされ，かつ β は $x=0$ なる直線の両側で値を変化する以外には至る所一定値に保たれているから，（191）の積分の BESSEL 函数を含む項を

（2）　free boundary，室の稜線から $\frac{\lambda}{2}$ 以上はなれた位置にある周辺を自由周辺という．